

阎坤. 关于连接方程的简略注释[研究报告]. 西安: 西安现代非线性科学应用研究所, 2011-03-18.

YAN Kun. Brief annotation of the connection equation[Research report]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 18 March 2011.

<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/ConnectionEquation-pdf.pdf>

关于连接方程的简略注释

阎坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘要: 本文给出了连接方程的构造过程及其若干应用的简略注释, 进而给出了前偏对称(欠对称或弱对称)方程及后偏对称方程的简洁构造形式, 讨论了连接方程是一自嵌套非线性动力学方程形式的近似等效解析解的分析方法, 分析了一类简单非线性微分方程的基本解析解表示形式, 探讨了自然现象演化过程的规律谱系(或谱阵)及连接纽带大略一简学或维学研究方向, 提出了现象在演化过程的状态转变方程, 其在一般情况下遵循最优或最简洁路径光滑曲线方程形式这一自然最优原则或自然简洁原则, 构建了现象演化系列相变特征函数的一种扩展型双曲正切级数近似表示形式, 继而提出了自然演化平衡法则, 给出了生物生长曲线趋势性方程; 依据连接方程的非线性动力学方程近似形式, 预言了二个基于非线性动力学方程的电路元件-电容存器(nonlinstor)和电敏器(geomsensor), 其皆为深化型电容器的电路器件, 分析了 RLCNG 串联电路微分方程的性质; 给出了广义分布函数及广义分布密度函数的延展方向与粒子统计分布趋势性方程及其若干条件解, 讨论了 Planck 量子方程的频率区间性质, 探讨了具有近似线性变频解的非线性微分方程形式及在负频率情况下变频波动方程的曲线形态特征, 讨论了数据库理论构架(此构架由基础数据库、趋势性方程、解析数据库构成)的一种简洁模式, 建立了美国年度能源消费量与 GDP 关系方程及英国年度人口数量与 GDP 关系方程, 并计算预测了美国年度能源消费极限值与英国年度人口极限值; 随后探讨了岩石及单晶高温材料的蠕变过程曲线、半导体分立器件 $V-A$ 特性曲线、超导材料电阻 R (或电阻率 ρ) - 绝对温度 T 曲线方程, 双晶 Josephson 结直流特性曲线及 Shapiro 台阶电流阶跃幅值曲线的趋势拟合方程, 机械系统或伺服系统摩擦力-速度特性曲线(包括 Coulomb 摩擦、Stribeck 摩擦、黏性摩擦、摩擦迟滞及反常摩擦迟滞效应)的趋势拟合方程, Newton 冷却定律的扩展方程形式, 高聚物熔体流动曲线剪切应力-剪切速率(包括第一 Newton 区、假塑性区、第二 Newton 区、胀流区、湍流及反常剪切效应)的趋势性方程等。在唯象及趋势层面, 指出了材料蠕变过程曲线与高聚物熔体流动曲线具有类似性质, 及材料断裂裂纹扩展结构与流体湍流漩涡嵌套结构这二种现象演化在分形测度表述上具有相通性的研究方向; 最后讨论了连接方程在数据拟合及长程预测方面的局限性。

关键词: 连接方程, 自嵌套非线性动力学方程, 规律谱阵, 简学或维学, 状态转化方程, 自然简洁原则, 自然演化平衡法则

Brief annotation of the connection equation

YAN Kun

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, brief annotation of a constructing procedure and the applications of connection equation are given, then the simple constructing forms of forward partial-symmetrical equation(or weak-symmetrical equation) and backward partial-symmetrical equation are given too. An analytical method of the connection equation as an approximate equivalent analytical solution of a self-nested nonlinear dynamics equation is discussed. The expressions of the basic analytical solution of a class of simple nonlinear differential equations are analyzed. Research direction of Jiansics or Dimennics about spectrum(spectrum array) formed by series of laws and their connections in evolution processes of natural phenomena are explored, an equation of the transformation of the phenomena between the states in evolutionary process is presented, that it follows a natural optimum principle or a natural conciseness principle in general, which having an equation form of the smooth curve with the optimal path or the most concise path. An approximate expression of extended hyperbolic tangent series for the characteristic function of the series phases transition of the evolution of phenomena is constructed, then natural evolution-balance rule is presented, and tendency equation of biological growth process is given too. According to approximate form of the nonlinear dynamics equation of the connection equation, two new electronic circuit elements(nonlinstor and geomsensor) with deepening charge-controlled capacitor properties based on form of the nonlinear differential equation is predicted, and the nonlinear differential equation for a RLCNG series circuit is also analyzed, extended direction of the general distribution function and the general distribution density function, tendency equation and its conditional solutions of the statistical distributions of the particles are given, properties of the frequency interval of Planck's quantum equation are explored, nonlinear differential equation expressions with solution of approximate linear frequency conversion and their characteristics of curve shapes of frequency conversion wave equations at negative frequency are discussed, a concise model of database theoretical framework (this framework to be made up of foundation database, tendency equation, and analytic database) is explored, an equation of relationship between the total annual energy consumption with the annual GDP in the United States, and an equation of relationship between the annual population with the annual GDP in the United Kingdom are established, and limit values of the total annual energy consumption in the United States and the annual population in the United Kingdom are calculated and predicted. Subsequently, tendency fitting equations of curves are explored, which included the creep process curve of the rock and single-crystal superalloy, the Volt-Ampere characteristic curve of the discrete semiconductor device, the resistance(or resistivity)-absolute temperature curve of the superconducting material, the direct current $I-U$ characteristic curve of the bicrystal Josephson junction, and the current step amplitude of Shapiro steps, the friction-speed characteristic curve (that included the stages of Coulomb friction, Stribeck friction, viscous friction, friction hysteresis, and anomalous friction hysteresis effect) in mechanical system or servo system, an expanded equation form of the Newton's law of cooling, the shear stress-shear rate in the flow curve (that included the sections of first Newtonian fluid-flow, pseudoplastic flow, second Newtonian fluid-flow, dilatant flow, turbulent flow, and anomalous shearing effect) of the polymer melts, etc. On phenomenological and tendency levels, research directions of similar property of creep curves of materials with the flow curves of polymer melt, and similarity in the fractal measure of the evolutions of fracture cracks growth structure and fluid turbulent eddies nested structure are pointed out. At the end, limitations of the connection equation in data fitting and long-range forecasting are discussed.

Keywords connection equations, self-nested nonlinear dynamics equation, spectrum array of laws, Jiansics or Dimennics, states transforming equation, natural conciseness principle, natural evolution-balance rule

作者简介 阎坤, 男, 1962 年 10 月生, 吉林榆树人, 1983 年 8 月毕业于长春地质学院, 目前主要从事非线性科学研究。
(Email: yankun@nature.ac.cn)

0 引言

在数据整理归纳过程中, 连接方程方法可以在现象演化原理层面研究路线之外进行并行探讨分析, 是与原理分析的并行探索路线。对在基础原理尚未完全建立的现象演化过程, 连接方程方法则是较为直接的唯一分析途径, 为建立现象演化的非线性动力学解析体系及其近似等效解析解方法提供参考描述。连接方程方法同时也对主曲线理论中数据局部骨架的过渡性连接描述提供参考曲线形态, 为理想饱和过程及一般阶跃过程的连续渐变阐释提供趋势性方程形式。

本文简略注释并展开讨论资料 1 中连接方程形式的构造过程及其部分应用方向, 并进而给出了饱和过程前偏对称(欠对称或弱对称)方程与后偏对称方程的简洁构造形式; 探讨了连接方程作为一较为简洁普适的自嵌套非线性动力学方程形式近似等效解析解的分析方法; 分析了一类简单非线性微分方程的基本解析解表示形式; 探讨了自然现象演化过程的规律谱系(谱阵)及连接纽带大略一简学或维学研究方向, 指出了现象在演化过程的状态间转化方程, 其在一般情况下遵循最优或最简洁路径光滑曲线方程形式这一自然最优原则或自然简洁原则; 给出了自然现象演化系列相变特征函数的一种拓展型(扩展型)双曲正切级数近似表示形式及自然演化平衡法则、生物生长曲线趋势性方程、稳定核素比结合能方程、太阳系元素丰度趋势性方程、及可生成周期性曲线的复合扩展型双曲正切方程; 预言了几个新的基于非线性微分方程的电路基础元件(包括电存器—Nonlinstor、电敏器—Geomsensor 等), 分析了兼容 Newton 动力学位移—时间方程、RLCNG 串联电路电荷量—时间方程的部分性质; 探讨连接方程及其非线性微分方程近似形式在广义分布函数及广义分布密度函数形式延展方向、粒子系统的统计分布趋势方程、Planck 量子方程的频率区间性质、具有近似线性变频特征的微分方程及在负频率与正频率之间转化时变频波动方程曲线的形态特征、数据库理论的一种简洁构架模式中的趋势方程、国家能源消费总量及人口总数与 GDP 总值关系方程、美国与中国在年度能源消费总量趋势性极限值及年度人口总数趋势性极限值的对比分析、国家各阶层人均年收入值与其所占人口比例数关系方程等方面的应用, 及在岩石与单晶高温合金蠕变曲线、半导体分立器件 V—A 特性曲线、超导材料零电阻转变区域 R (或电阻率 ρ)— T 曲线、高温超导双晶 Josephson 结直流 I — U 特性曲线与 Shapiro 台阶电流阶跃幅值、机械系统或伺服系统摩擦力—速度曲线(其中包括 Coulomb 摩擦、Stribeck 摩擦、黏性摩擦、摩擦迟滞、反常摩擦迟滞效应及复合摩擦迟滞效应)、Newton 冷却定律的扩展方程形式、高聚物熔体流动曲线剪切应力—剪切速率关系(包括第一 Newton 区、假塑性区、第二 Newton 区、胀流区、湍流及反常剪切效应)等方面的趋势描述方程应用计算。在唯象及趋势层面, 指出材料蠕变过程曲线与高聚物熔体流动曲线的相似性质, 及材料断裂裂纹扩展与流体湍流漩涡嵌套二种现象演化在多层次机理特征和分形测度表述方面具有相通性的研究方向(包括如 Navier-Stokes 方程的参考求解方向); 最后讨论了连接方程的局限性。

1 一种简洁的非线性动力学方程自嵌套结构特征及其与连接方程的关系并及自然现象演化过程的规律谱系(谱阵)—简学或维学纲要

一般地, 缺少数理解析方程参与构建的理论体系是不完整的, 而仅靠理想解析方程描述许多时也存在相应误差; 一方面, 经典方程描述现象演化过程所存在的细微偏离, 往往隐含着新的效应, 连接着新层面或新方向的描述体系; 另一方面, 通过对经典方程的对称形式及拓展形式研究, 亦可直接预言并展现新的效应及新的理论发展方向, 传统经典理论自然成为新理论体系的一种极限特殊表现形式。这其中, 理想的解析方程描述是必要的, 包括由现象演化过程诸阶段的一系列方程构成的规律谱系(谱阵), 但仍需趣向更高层面的超越解析方程的阐释。

在大略非无穷层面, 哲学是通往智慧的阶梯, 科学是适当细化的哲学, 而哲学要义则弥漫在科学的线性之前、非线性之后、及其转折之间; 同样, 数学具有哲学的思辨细化及具体抽象的内秉特征; 是故, 对哲学以外学科缺少深入研究的哲学家一般难以产生深刻洞见, 即哲学家需要有自身具体学科卓越成就的滋养支撑; 而对哲学缺少细致思考的科学家一般也难以走远, 即科学家需要有基于自身研究成果对哲学中普适内涵精义的提炼证解。

在科学的广泛意义上，一条基本准则是：凡事皆可因果解析。

该准则较为一般的阐释是：在科学研究探索的普适意义上，现象界一切事物的存在状态及演化过程皆有其内因外缘，可于适当情况下次第细化拆分与复合凝聚其因缘故关系，预言辨析并证实总结出阶段性趋势规律，给出开放性的动态结论标记。

众生与其共业及别业伴生递续轮转，由众生共业化成的动态诸层世界，也即是由众生因缘业果所自作的层层变局，局局映射变迁，阶段性地显现趋势演化规律，历代学者哲人穷尽身命在诸层变局中探索主线脉络及其根源本底，乃至示现觉悟次第、智慧回向、圆融清净。

在学术著述层面，若满篇哲学术语阐释而中间几乎未进入成住坏空过程描述及未采用合适的数学方程刻画，则内容较为空泛浅显、缺少底气及难以进行趋势性预言计算；若通篇数学方程解析却未回归哲学层面予以普适概括，则更是以中间台阶作为终极舞台而未趣实相；二者间适当的内容比例及主线侧重印证是合适的。

目前，对于同一类现象的演化过程阐释或机理解析，在学者著述的比例方面，以系列数理方程为主脉络刻画的著述，仅约为几乎全部定性描述的著述数量的数千分之一左右。定性阐释的著述偏多，著述内容宽泛弹性大、对错风险较小，其绝大多数几近可有可无；定量分析的著述偏少，但著述针对性较强、对错风险较大，能够为深入探索提供理性的参考基础。

在学术著述层面以上，尤其是在近于圆融的智慧层面，哲学、数学、逻辑等诸语言格式、乃至分别意识思议等则都是可有可无的，充其量仅是一种局部的特定条件下的趋势性指引，所谓的理论基础及基本原理亦多是唯象性理想构造台阶；其中阶段性具体指向与普适性遍历含容或俱显相互补充，或凝聚和弥漫协同，或半隐互为潜势，联合虚拟隐喻及伴生悖论一体渐转启迪。

于背景底蕴上，一自发默认的略带圣者辉光的朴直传统是：在理论体系较为容易拓展及应用的方面或方向，适当留下一些给未来学者，以引导他们顺利介入并继续发展研究，互济延续智慧慈悲；至少是在后续学者处于困顿低谷时期亦能够随缘随遇有口饭吃，以保底续命待时转境跃进。

本质上，所有的数理逻辑理论，都有不能自证的隐含悖论的动态基础构造，都是唯象性质的体系，差异仅在于唯象的程度或多或少，是故保持一个理论体系的开放性特征是极其必要的。

仅就数学而言，普适构造与逻辑解析相辅相成，几何思想代数化与代数思想几何化交相辉映，部分要旨即是将零及无穷皆变换或映射为可区分的有限量表述形式；以线性构造为始，将线性拓展为同层面更为一般的非线性形式，再将非线性形式转化为另一层面的线性构造运算；构造纯粹对称性及纯粹周期性运算，继而对非对称性或非周期性表述形式引进对称因子或周期因子进行补缺对称及补缺周期予以形式转化；离散与连续互为内核及倚仗，微域常量与邻域微变相互含容和支撑，缓变与阶跃相互依存补充，局部与整体相映相成，此皆是数学构造层面的要义所在。开放、严谨，纯粹、浩繁，融映、无穷；在整体上，构造高于解析，解析高于计算，构造与悖论伴生同在，悖论隐含新的构造，新的构造亦隐含新的悖论，原理或定律与其伴生悖论交织转化；解析由计算来趋势验证，构造以解析为延展骨架，深刻的具有颠覆性的悖论即若隐若现于构造之中，构造与悖论一体演进；诸多数学方程描述，都有一类自然现象演化过程在趋势上与之相对应，乃至包括其中部分有悖传统脉络的负解及复变函数解所代表的潜势或内涵诸层背景的转化演替意义，所需要的是适机给出相应的引导方向及揭示途径；进一步地，可将数学方程与自然现象演化过程相对应中的部分有悖传统脉络的负解及复变函数解定义为方程的潜势解或背景解；深入研究方程的潜势解或背景解，对于探讨数理方程诸解之间的转化规律、演化深层机理、乃至揭示规律谱系或阵列等都具有引导意义。这是数学的根本法则，是数学的主旋律，使数学既可以动态自成体系，同时又能够在广泛应用于其它学科领域进行深入阐释延展的过程中相互促进共同发展；而且由其它学科衍生出的数学问题，一般容易成为数学中具有潜力的分支方向，其数学解析延展形式更具有普适性及生命力，并有效连接其它分支节点。大数学家，主要在构造及其伴生悖论层面，乃至关于构造的构造、悖论的悖论、悖论的构造层面拓展数学疆域，深刻更新拓展并稳健加固数学基础；对诸如天体运行轨迹及社会演变趋势性规律等方面有所探讨及推进，明晓逻辑演绎的局限性及超越逻辑的途径。

数学的普适构造，具有类似于物理学原理的性质，属于错落纷呈的微型“开天辟地”层面的工作；逻辑解析具有定理的性质，属于脉络延展层面的工作；计算具有验证应用的性质，属于细节覆盖层面的工作；三个层面相互交融互为支撑。

数学的逻辑解析和普适构造，与生物学的遗传和变异相当；在相邻层面，普适构造以逻辑解析为内核，逻辑解析以普适构造为本底，如此既可避免普适构造的随意性，又可使得逻辑解析具有灵活的开放适应性，保证数学理论框架体系相对自治、适时突破、转折跃进。

在一般意义上，数学不同于哲学，但具有细化哲学的特质；数学不完全是科学，但框架构造往往需要解析计算数值验证；数学有别于通常知识，但可以改善知识结构并相互促进；数学并行于传统宗教，但从大千世界抽象出的构造延展有效性及方程描述的简略普适性却可以生成由衷的理体信仰。

数学是人类发明与发现相交织的逻辑解析混合体，既有貌似纯天然的脉络投影，更有人工搭建加固及雕琢打磨的痕迹，甚至在分支方向还带有构造者的风格；其基础不能自证，逻辑演绎排它不完备，诸层面构造深隐矛盾及自颠覆悖论；若学者以为所从事研究的学科完备性远优于其它学科，则一般是没有走出过学问台阶的表现。

在自然现象演化过程，一般在趋势上具有阶段性的起承转合特征，展现出系列相变的演化模式；引入无穷会导致层面跨越，跨越层面后的性质一般已经发生变化，而仍以原层面的性质细化平均或广域延展描述，仅是一种拟定所需的在原层面的趋势概括。

从数理逻辑的角度分析，建立现象演化过程的动力学微分方程是重要的，但由于现象演化的多阶段性、多层面性及自反馈性等基本特征，使得建立严谨的普适性动力学微分方程一般是极其困难的。

对于将一微分方程组化简为一般的非线性微分方程形式，往往无法直接求其严格解析解，可用近似等效解析解法分析；此方法为：按照分析方向将难解的非线性动力学微分方程简化有解析解的线性或非线性微分方程，将此解析解予以拓展为初始近似等效解析解，然后将此初始近似解代入原微分方程中试算，修正近似解，再代入原微分方程，如此循环修正代入试算，确定最终近似等效解析解形式。

此趋势性近似方法与解微分方程的 **Lagrange** 参数变易法比较，主要是针对通常情况没有严格解析解的微分方程，由于在解的拓展方向、试算过程有所省略及修正代入试算次数等原因，使得该方法仅是给出近似等效解析解。

实际上，即使是主要针对单一及少许兼顾临近层面现象演化过程所建立的简洁基本微分方程组，往往也无法直接给出严格解析解；在此情况下，可采用构造趋势性近似解方法；该方法为：分析微分方程组解的可能极限特征及转折点特征，然后通过构造相应性质的函数形式，给出微分方程组的初步趋势性近似解，再将此构造出的初步趋势性近似解代入原微分方程组进行符合性特征分析并予以形式及参数的适当调整，如此循环，确立微分方程组的趋势性近似解形式。

上述解微分方程的近似等效解析解法与构造趋势性近似解方法，都有微构造的初始操作成分，亦都有代入循环调整的步骤，对于普遍而又无严格解析解的微分方程分析具有指导及参考意义。

自然现象的数理方程趋势性阐释，其内涵主线脉络是激励、演化、守恒，是因缘果，是业；极致层面上，这也是一切语言逻辑分别识描述自然现象的依止根本。

在数学描述上，无穷小通过适当降维可展现无穷多的细节及大于零的常量特征，无穷大通过适当升维可整体趋近常量、乃至是无穷小表征。无穷小再小本质上仍为区域，无穷大再大仍有预置的边界本际；适当变化维数，诸多无穷小与无穷大皆可转化为非零的常量。也即是，仅在数学的测度意义上，0 与无穷是阶段局域层面的等效常数，是所描述维度上的近似标识基本量，其各自皆包含着相互关联映射的无穷的无穷内涵。这具有远超越数学维数及测度内涵的深远引导意义。

无穷小，似零非零，光华绚丽，回味深长，最是让人欲罢不能、辗转反侧；无穷大，似大非大，旷远浩渺，变幻莫测，甚是引人渐入胜境、心醉神迷。

无穷，凝练而又羞涩，历久而又弥新。极少有学者在直面无穷后，还能够从容完整离开。即使较为平常的一组无穷小非线性变换构造及其解析延展，就可直接耗尽一名天才的珍贵年华。

无穷，是数学的甚深糊涂账，亦是数学的至高宝藏。

无穷，作为科学研究的重要思想和功能元件，按照现阶段的惯性应该还能够支持一阵时期，同样微积分也还应该能够再延展一些领域。

古往今来，诸多圣哲思想著述及传承，无穷都是至为不可思议的动态概念，是贯穿禅证、哲学、数学、及自然科学相关学科的深刻思想，是微许已知和几乎未知的复合量，是极为柔软与至为坚硬的混合物，是几乎无往而不胜的利器，是诡辩的变形工具，是矛与盾的极致统一体，是开阖生机湮灭秘境，是一多层次动态世界，是少许开放场所及几乎完全隐蔽地域，是已有理论框架的重要构成部分，是理论基础原理伴生悖论的重要构成单元，是原理认定与悖论异议的显隐伴生自补充及互含嵌套自融合概念，是拓展新领域、开辟新天地的入口，是极致连接体，是生门亦是险境，既现实又玄幻，既淡漠冷酷又充满诱惑，至诚涉足其中却很难完整生还；玄妙精微恢弘磅礴，融合显密纵横捭阖，历来为开宗立派的祖师们所特别重视。

无穷，精微广远，层层辉映，无有尽际；含摄着不确定、无限可能及无穷的无穷之间的映射嵌套交融，几乎穿越末那识直趣逻辑语义及思量静虑的尽头化城—阿赖耶识、如来藏。

深解无穷尽，函数阶微分；嵌套无穷尽，清净越识论；彻证无穷尽，微妙广梵音。

学术阶梯上，初级学者往往较为急于显示自己在前沿附近所知道及领悟的点点滴滴，意在突出；而资深学者则常常在深刻自省自己还有哪些尚未透彻通达的领域及方向，旨在补足。

一名思想家，仅当经过自然朴素而又深刻纯粹的无语无为及绝境寂灭重生阶段后，其表述现才初具圣贤底色光辉。知机随顺，启众慧命；自度度他，无功用行；无我我所，凡圣假名。对于纯粹而卓越的学者，脱壳去皮尚有仁在。至为珍贵的原始创造思想及框架表述形式，经过后代学者的精细加固及补充修饰后，质朴和宜的指引辉光被深隐在递转高阶的祭台里；若要承袭先前巨人的坚毅朝向，则需放下人生中的所有贪欲和忧虑而直过殿堂，方可能重启几乎远早于开天辟地时期的纯粹智慧或智慧种子。

诸多情况下，某一层面的待解问题，其答案或解决途径往往在相邻层面或在更远更深的高维度背景层面中，在跳转出既定问题的模式之外，乃至其指引及关联就在即下的平素日常生活里，在浮世江湖的豪情万丈及困顿无奈的绵长思绪中，在经意或不经意的举手投足及展眉瞬目间，而究竟并没有最终答案或根本解决途径，甚至都并不存在问题本身，存留的仅是学者的阶段性努力意愿及探索朝向。

这其中，非线性科学研究的较高境界是将非线性形式在另一层面重新归于线性构造运算模式，而其至高境界是具有跨层面特征，并兼具线性与非线性的表征形式及内涵特质，进而超越数理逻辑模式。

一定维度内的艰深问题，其在较高的维度可能都从来不曾生成，亦自然就不需要相应解决途径及答案，学者在原维度内艰辛探索的意义及成就几近于零，甚至原来在生灭递续层面的烦恼与快乐在更高的维度上亦无凝集，趣于生灭灭尽或生灭无生，周遍永劫、微妙清净，庄严自在、慈悲智慧。

如果学者在生灭幻化的知识体系探求中未涉入更广泛的维度，始终未迈向圆融智慧层面，则原有的知识体系也易成为学者的人生枷锁和羁绊。

数学发展到今天，机械论的内核思想仍然在起着主导作用，并在未来的一段时期仍将继续下去。机械论思想有其显著的直观朴素的优势，微域近似可逆，拆解重组、变换叠加、进退有据。

在解析构造上，定义了0（空元）及1（或单位元），约定了加法运算及其逆运算规则（包括衍生出单位逆元），则几乎全部数学可由此构建起来。简略上，大的数学在于框架构造，小的数学在于解析计算；整体上，框架构造与解析计算相辅相成，即脉络上数学的大与小相融无别。

对于学者，能够从容进出数学，数学仅是导引；进入却未适机走出数学，数学易成迷阵。

诸领域的超一流大家及祖师级人物，通常谙晓一般卓越学者所止步尽头之外的广阔世界部分图景，而且多为深耕诸相关学科之后又时常站在诸学科之外领略无限风光的旅行者，其所遗著述多为指向性的纪念残卷；后续天才在意图补全前辈残卷的过程中，又生成新的指向性残卷，如此次第构成系列延伸环节或台阶，乃至形成短亭及长亭，部分密集什字拓展为聚落与化城。

对于不同层面的数学家，某一支方向在构造层面已经近于阶段性完毕，在新一构造尚未展开之际，在表征上是属于“休克”乃至是属于“死亡”的研究方向；而在解析层面，可能是才正式展开、方兴未艾、大有可为，远未达到丰满圆润的程度；而在计算及普遍应用方面，可能几乎还在试探摸索中；即所谓“数学某个分支方向已死”，一般主要是指在构造及其伴生悖论层面而言的，尤其是关于构造的构造、构造的悖论、悖论的悖论及悖论的构造，是相对于数学大家、乃至横空出世的数学阶段性祖师级人物而言的。

相应或类似地，所谓“哲学已死”，一般是阶段性的开疆扩土工作已经近于尾声，大师级人物适时隐退或随缘谢世；这期间存世的主流哲学家经年累月地徘徊在源起本体与意识描述的主从关系之间，执著于第一性、世界构成、事物演替等普遍而又终极的规律方面，表象聪颖善辩实际无奈自欺，学问漫无边际却未及返观内照，偏离人类生存的意义及对生住异灭轮转的实践证解，既对科学研究难以实现具体有效指导，又距离现实生活的脉络韵律越来越远，几近成为可有可无的唯理学问。探究本源是必要的，但也仅是阶段性动态本源；识的层面是重要的，但若一直在识的层面翻跟头戏耍，则易成为识的囚徒或奴隶。诸多哲学家其实也不清楚自己究竟明白些什么，其明显特征是热衷本体、偏执己见、坐井说天外；理论构造上既不能自圆其说，现实生活中亦不能自我救度，在深刻的无法调节的自我矛盾的空洞争论及与统治集团的若附若离试探平衡中度过充满困顿与期冀的一生时光。大哲学家，其觉悟超越哲学层面，有在其它学科的具体独立成就予以相应支撑，并经由实验或实践予以验证；明晓世界的成住异灭周期性演化趋势，通达自然存在无数的并行动态规律，洞彻所谓的诸了义论亦仅是随缘善巧方便说，同时已不在意是否为哲学家；所谓哲学家，即非哲学家，乃名哲学家。

所谓“宗教已死”，一般是指阶段性的祖师级人物已经远去，他们的论述及事迹逐渐成为传说乃至神话故事；流传的经典残卷在后续继承者那里被大幅度打折及曲解，教义固化诠释陈旧且不容大众探讨置疑，超界辨思及阐释会被标识为亵渎及罪过，表面上的浮华繁琐仪式远大于实质上的内在自省修持成就，宗教场所多成为历史遗迹，宗教人员多成为寄居者，盛装粉饰成为寻常方法，浮华外表大于质朴内涵，往日先贤的荣光渐渐淡去，研习教义寻章摘句成为一种生存职业，乃至在利益诱惑面前更为处心积虑，在性命攸关之际更为彷徨畏惧，教派间势力角逐、人员职业化及利益驱动更进一步促使偏离祖师开宗立派的主旨；尤为重要的是，其中的主流人员大多没有对生死过程具有根本的悟解实证及因缘随顺的觉他指导，对普遍的困惑挣扎的人生旅途缺少慰藉安抚，对人的辞世过程缺乏主动有效的、知机有信服力的引导关怀。而且，诸多宗教家并不总是坚信自己所阐释的普世道理，在本质上更像社会组织结构中谋生续命岗位上的一套职业性程式化说辞；外厉内荏我执尚盛，关键时刻难以挺身而出舍己度人。无论先哲或导师如何神威，人生若选择长期依附及追随，则不能从根本上改变命运；尘世没有救世主，亦没有真正的公平及尊严，自我救度是根本；往昔圣贤仅是指引自救度的法门，真正有意义的人生是自觉证道、自如造化。大宗教家，是生死一体的示现者及解脱觉悟的导引者，是理行合一的践行者；非生非灭，非凡非圣；慈悲济世，智慧方便。

所谓“医学已死”，主要是指现阶段以机械论、还原论为指导思想，主流往细微调控机理方向走得稍过，而渐失在整体上、乃至包括在精神意识层面的趋势把握及转化提升；这其中以在生存物质基本具备的情况下，社会环境、成长阶梯、个体虚拟精神构架等因素对身体硬件性能潜移默化的引导影响，及身体健康状况与精神稳健状态的相互反馈作用导致一定时期的动态平衡或临界崩溃尤为重要；诸病多因心劳而显化，痼疾多源顽习而聚成。朴素地，在较低程度上身心健康的要旨为：妄心渐消淡然，肠胃清素洁净；食药滋养色身，毒药缓解重症。生住异灭是一般规律，将精神意识层面的活动与身体健康状态整合起来，转化无奈中的听天由命，使其在通达中坦然从容直面人生若干波折过程，乃至逐渐明晓生之前的多世宿业及死之后的可能投转方向，尤其是在其中的入胎、住胎机制及演化发展关键过程，则是医者，更是每一个体的自我觉悟及拯救升华；毕竟，自救度是一切救度的基础及根本；在近于本质上，未解中阴不足为医，未明轮回不足称智，未觉他世界不足论道。关注社会发展状况对各阶层各层面诸聚落人群的身心影响，医学主旨方向相应为完整个体的关联性“基础医学”、家族与社区的趋势性“群落医学”、与宏观大范围多维度的战略性“社会医学”，乃至如上三位一体的系统性“整体医学”；明晓医药的极限能力所在，一般地对部分患者能够逐渐自愈的病症及因年迈等原因导致的器官组织功能不可逆衰退等症宜建议以自养调理为主并辅之以适当药物改善状况，整体趋势把握兼顾局部细微，尽量避免过度医疗，设身处地安慰患者及其亲属。衰老与死亡，是人类面临的重要课题，生老病死是一般规律，延缓衰老及推迟死亡亦是共同的愿望；一种衰老与死亡是较为自然过程的相变连接现象，属于自然终结；而另一种衰老与死亡，则是在到达一定年龄后，环境暗示及自己精神认为应该已经抵达衰老阶段并正在逐渐趋近于死亡终点，如此软件影响硬件，硬件退化又进一步证实软件，形成正反馈促进这一衰老与死亡的相变连接进程，自我终结；人类更多的衰老与死亡连接过程则是自然终结与自我终结相混叠的复合终结形式。在这其中，当医学从业者由救死扶伤的仁者转化成汲取最大利益的生意人后，医学就随即成为生意场中的赚钱道具，医疗机构相互攀比营业额及利润，相应地患者也不再享有人格尊严。真正的大医者主导未病防病，应病辨症施药整体平衡调理，观色晕察气神辨经脉，和顺协调周遭亲怨异类，通达阴阳数术命理；严正使患者生信，周达给患者希望；默然间有出尘之意，诊核中现长者之风；若当患者病沉命绝则随顺施予临终安抚引导，仁智善巧覆盖从未生至临终及死后中阴境身心次第分解过程；且明生死连绵辗转，晓宿业因果循环，彻众生一体无别；极致上，国体如机体，大医者亦善于诊治国病。

所谓“科学已死”，一般是指一群以科学研究为谋生职业的学者组成学界，在一定时期学界推崇少数权威至上，教导众者盲目信从；甚至使科学成为操纵资源的介质平台或几股势力笼络游侠勇士的渠道，过于强调团队的规模力量，包装拔高、拉帮结派、圈地占山、门户林立；守墓护碑者呆滞空洞，守业护成者蛮横霸道，或循规蹈矩泥古不化，或慷慨陈词自诩正统，暂居一枝梢末节即高歌动天唯我独尊，一派学术江湖种姓宗族景象；其所论所作，更似小儿啼哭，庸人得势。朴素地，学者若是经年累月地端着东家的饭碗讨生活，则在雇佣关系上就已确立长工身份首先得考虑予东家迎合揣度助力时鸣。内里游戏规则大家都基本清楚，但置身其中利益相关也都只能尽量糊涂；表观拿班作势或行云流水，实则养家糊口且勉强度日；无奈而迷茫困顿、无力而随波逐流，在浮华幻影中耗费了宝贵的人生时光，况且其中很大比例是几乎没有独立思想及研究成就却还频频自以为是的职业摆设及道途装饰；即使偶有微许所感，亦多是前辈祖师的思想光芒指引延伸。诸多学者，没有自己的独立人格及开创性业绩，亦较少对师长、同辈及晚学处在人生困境挣扎时施以力所能及的必要援手，其所谓的学术成就形象及领域权威地位几乎是权力集团应景包装赋予的光环，乃至仅是权力集团博弈游戏中的附庸缓冲及花边点缀；圆滑多面精致算计，蝇营狗苟猥琐门客；虚浮玲珑而矜持自欺，表面谦诚实则狭隘自负，甚至以平台岗位赋予的组织权力误以为是自己的实际通联社会能力及科研成就地位；如此一旦离开建制化体系平台岗位之后，随即失去大部分烘托支撑与庇护遮掩，从而迅速退化为普通人，甚至已不具有一般民众朴素自然的良知觉悟及生活能力；既不为权力集团所重视，亦不为社会民众所敬佩，成为背负些许散碎知识及浮沉见解的人间沦落者或孤独异乡人。真正的大科学家，俯视科研体系及争芳斗艳台阶，亦不为学术成就所羁绊，纵横微尘之内、太虚之外，站在多世界之间，明因果通无穷，超越知识层面，亲证转识成智。

诸多学者，哪怕是稍微参照比下历史上祖师级人物的成就贡献，则即知自己从未曾真正到达过专业知识体系的疆域边界，没有几项能够拿得出手可以明列在桌面上的研究成果，在构建理论及实践拓展的角度几乎相当于从没有来过人世，曾经的春夏秋冬晨曦晚照恍若梦中之梦；而若能由此猛然省悟，彻达心源往复激荡、了了清明廓然无际，则亦可直接归向智慧大道。

在极端情况下，一个学者若是勤勉一生却仍然一事无成，则也是成就了“一事无成”这件事；况且，耗尽一生精力却一事无成亦是一不凡之境地。退几步，然后再跨越现下境界，则即是大磨砺产生大淬炼，大阻碍产生大觉悟。在近于究竟层面，一切超卓成就都是宛然现成的。

部分取得些许研究成果或心得的科学家热衷于不失时机地向权力集团推荐自己以期借势或实现阶层跨越，而权力集团的回应约请，更多时仅是来自权术的技巧礼数；实际上权力集团只需数数并笼络有卓越成就且对国防及民生有杰出贡献的科学家数目即可。极端地，如果科学家成为权力集团的操纵工具，则科学家便会逐渐身不由己并偏离科学探索的初衷。在许多时，权力集团的运作层面及所面临问题的复杂动态程度，远超一般科学家的思考方式及认知维度。

当人生走到尽头，卓然风华不再，蓬勃烂漫的青春时光早已远去，激昂豪情业已消磨殆尽，时代更迭物易人非，角色演饰显现真相，边缘帷幕渐趋合拢，旅途最后的压缩场景及关键几步需要独立面对并走过，伤感与无奈逐渐弥漫心间，尴尬局促及消沉抵触与日俱增，落寞回忆和摇头叹息成为素常主旋律，人生至此则顿悟世事如梦本无可恋，唯余平和自主辞世。

如果科学界的风格演化成为所处当世的权力机构的投影，科学界成为名利场，殿堂之上设立至上权威，学术交流设置终极理论，权威培植嫡系遴选学术贵族，联合把持资源指点江山，甚至若隐若现地有少部分特权代言人游离在科学界边缘却几乎完整地操纵着科学界，学术围着权力转，迎合阐述替代剖析探讨，学问沦为拥护权力的工具，学者渐失独立人格及风骨豪情，使得适当的探讨自由成为奢侈品，那么这个科学界则难以包容不同的观点、声音及操守，唯上唯权投机取巧、成果包装虚假拔高、奴颜婢膝阿谀奉承会逐渐尘嚣直上；以社会地位等效科学成就，以掌握及消耗经费额度等同于学术能力及研究水平，部分学阀抱团通揽资源相互提携，大课题小验收弹冠相庆、小课题大折磨度日如年，其几乎与科学研究主旨背道而驰，旁置科学探索及研究的初衷，使得具有深刻思想的学者逐渐被边缘化，或主动远离学术圈，淡泊自律平度余生。

特别地，一名学者若极其执著科学探索，将所谓的科学真理十分当回事，言必科学教义，则一般是综合智力有待大幅度提高的表现；在近乎根本上，于诸门学问领域及技艺方向，若学者或从业者太执守偏激，思维拥此斥彼，未明经世大略及世出世法，则其综合智力亦复如是。

科学需要旗手，但权威会直接成为障碍；科学需要自由，但随意会导致误解及偏执。

在这人世间，越是聪颖之士，越容易陷于数理逻辑或史实考据等迷阵中难以自拔超越，其以为庆幸找到了人生事业及归宿，著述等身名誉无极，到头来老之将至，生命及世界的本相逐渐显现，尘世间的所有知识和名声在濒临死亡之时都直接归零、甚至还会因为过于执著往日繁盛而形成负面影响，所有的权势及超卓、自信和从容皆退化还原为无力与平庸，悔恨沮丧、落寞拘谨、无奈迷茫、无边未知，乃至在累世业风的吹拂下陷入无尽的畏惧恐慌幻境之中。

古往今来，学者一旦以体制内的科学研究作为谋生职业，则被动性的行政干预及利益驱动就自动形成了，甚至是在跑腿跟护端茶及揣测赔笑唱赞歌中度过了大部分附庸性的职业生涯。

特别地，学者若想避免成为工具或棋子被多时无意义驱使消耗而无以自主人生，则一朴素方向即是掌握几项谋生技能以保底自养，洞彻并看淡浮世功名，透过乃至超越智库帝师或幕僚参议等过渡性或补丁性诱惑，屏蔽试探性的殚精竭虑及违背本心的迎仰赞颂等事务，少介入免听调，简化生活耕读自觉，收敛光芒超脱怡然，虚游幻世通达生死，从容恬适随缘启济。

学者若想检验下自己的品学修持及运用变通整体能力如何，则较为极端的途径之一即是毅然离开体制支撑及建制化岗位，绝缘长辈关系支撑，一无所有地到社会上历练些年，就基本清楚了。此自检途径带有较高程度的冒险性及几乎完全的不可逆性，人生若有诸多牵绊则不宜选择此路。较为谨慎实验性地，至少在自检开始阶段，若选择隐性离职模式，适当留有退路，中短期可逆向操作，则较为现实稳妥。当知在现实世界，许多时无奈而困顿是人生主旋律。

现象界凡有生即有灭，灭与生同在；学科框架，理论体系，思想脉络，亦皆如是；所谓科学研究成就及其附加光环，仅是自然演化的阶段性伴生产物，纵是一时绚丽如繁花灿烂、莹澈如星宇渺远，亦终不过是虚幻浮景、过眼云烟。

幻世如戏，人生如梦；快乐时光短暂，煎熬岁月漫长。本质上，人生面临的许多事情抉择无需询问他人意见，仅需问问自己的本心良知和品性才智就基本清楚了。世事更迭曲折甚为淬炼，初上路时可能忐忑迷茫，阴云密布间或狂风骤雨；结束时或许已豁然开朗，阳光明媚风轻云淡，超然物外无所挂怀，回望过去似乎一切也不过如此，但同时亦弥足珍贵；勘透娑婆世界虚影幻相及人生本来面目，随缘随遇自觉觉他，尽可能按照自己的意愿度过一生时光。

较为成熟的科学家，至少明晓相邻学科的主线脉络，掌握所从事领域的诸层面局限及前沿面临的根本问题，洞彻尚未融和的诸理论分支及其隐含的若干悖论，俯视并踏勘主线上的关键拐角，历经庄重进入、勤勉深耕、再从容走出三个阶段，能够初步展望下一个台阶的轮廓景象及通达的可能途径并付诸实施。

真正的所谓大师级或祖师级人物（领域大玩家），一般都有较为明晰通透的自评定位或自知之明；其熟悉足够深度的前辈思想及理论体系，并在构造层面及解析层面对前辈的成就给出根本性推进或拓展，深心远旨高越宏迈；既与前辈的成果相融合，给出前辈成果的极限适用范围或成立条件，同时又相对独立自成体系，给出新的拓展及预言，乃至经由不断转化兼容在构造中隐含的颠覆性悖论，使得所建立的体系逐渐能够稳健地自行生长繁衍壮大，巍峨浑雄峻拔盈逸，黄钟大吕万千气象，兼容并蓄通达无际，纵横捭阖蕴藏天下大势，史诗般地开放性适机演进，往昔古风融含现下新貌，大千世界成为其部分虚拟投影，通达生死轮回及其多层背景，过去现在未来一体无别，平等无住自在离相，直至进入无边无界不一不异的无功用行智慧领域；其中尤其是后面的卓越三步，其难度远超过诸如从恒星级别到星系级别的跨越。

部分大师级人物，娑婆经行示现，诸般逆境坎坷波折，勤勉进取智慧互济，虽一世而幻历累劫，其卓著成就及深刻思想终成人类文明进步趣向自由尊严的指向灯塔。

学者每过一段时期放下工作岗位及家庭生活等诸事项，合上书本走出书斋或实验室，纯粹作为一个自然人进行适当的徒步旅行是适宜的；用身心切实体验感受自然并融回一体，随顺达观安详通澈。

自觉超生灭，觉他历累劫；觉行衍微妙，圆满无所得。

学者从简单进入复杂，又能够从复杂抽象出理想简洁形式，再深入复杂境地，与一直处于简单或一直处于复杂境地的学者，在看待世界演化状态及诸识映射关联的角度、层面，一般是有所不同的。其中，仅当成果带有构造及其伴生悖论的成分或特征时，才具有原理或法则层面的意义。

大略要领是重要的，但总居大略层面则易偏于简泛；同样细节也是重要的，但过分注重细节则亦失之纲要；大略与细节适当兼顾亦适当放任，动态开放局部可逆，方进自如门径。总体上，大成就学者的工作主要体现在学科构造及其框架延展层面，而一般学者的工作则主要表现在对学科已有结构及框架的装修及粉饰方面。

其中的大要所在是：短程简化处理，长程动态开放；局域线性耦合，整体非线性联立。

学者经过刻苦努力取得卓越成就，若能不被成就光环及其附带利益所控制及反噬，且在新的层面归零后又整装重新开始，则是为稀有；这其中尤以自力自发取得世出世成就甚为珍贵。

学者在经过科学的台阶之后，进一步地若能进入内视阶段，则将逐步觉悟知识体系中所所谓的物质与精神、空间与时间、情绪与苦乐、家国与宇宙等等，皆是如梦幻相；往昔曾经致力于数理方程描述宇宙太虚演化及运转规律，是偏于幼稚的坐井说天浅论自娱，所积累及开拓的科学理论体系，其在极限上仍属有漏分别识产物，远不足以刻画自然界，且烦恼丛生缠绕、生灭轮转不息，更难起无穷现行妙用；然若以此有漏分别识迈向无漏圆融智慧，则亦可趣归清净大道；从利益驱动环节运营身家开始，经肩负道义幻相阶段，向自觉觉他觉行圆满化城迈进。

在长远趋势层面，人类的发展主线就是向更高阶智慧与特权进取的过程；趋向圆融智慧与获得至高权力是人类永恒的追求；无边的庄严自在与无尽的掌控操纵让无数英雄豪杰前赴后继。

在接近道的大略层面，学者、医者、治国者、教员、兵家、谋士、布局者、武者、游吟者、木匠、裁缝、厨师、农家及园艺师等，内在因势利导连接转折的主旨思想基本相通；乃至其人其迹，亦成为连接转折的构成环节；前因后果，联立互补；虚实结合，内外映衬；稳健朴直，苍劲浑雄；飘逸无羁，法度严整；开局造势，时运天成。在综合能力等效满格十分中，七分显现随遇和宜造化，三分隐势预备适机突发。

一般相对地，较为具体的工作是属于战术型的，将具体战术型工作整合起来通盘集成的工作则是战略型的，所有战术型工作皆需围绕上一层的战略型工作目标运转；作为必不可少的试探性工作，其中的部分战术型团队损耗及牺牲是在所难免的，甚至就在预先的计划中；战术型或战略型都有相应的规模层次性及相对性，不同层次的战术型与战略型工作相互嵌套重叠；而由具有全局且长时效层面上的战术型将领锤炼出来的战略型统帅，则一般更为扎实可靠且深刻超卓。

原创著述，若是想让后来者快速跟进并持续完善，则大可旌旗招展、鼓角喧天，且逻辑严谨、循序渐进，必要地在前沿地带特意留下若干较为显著易得的验证阐释或延展推广；若想后来者明显迟疑一段时间，则可在逻辑结构的平铺直叙中适当增加台阶幅度及门限；尤为重要的原创著述，若有意让后来者直接忽略一段时期，则可在部分逻辑缠绕节点附近于不经意间设置几处朴素简单无关宏旨的纰漏及差池，或者在给出关键方程及其解表述的同时附上伴生壳罩方程形式，截阻屏退或解转善导根浅量窄者及取巧轻慢者，言止适宜，无限无苛，以待衣钵传承机缘。

广泛地，一篇咏怀言志诗文的主旨往往是其中较为柔和细腻的一句表述，一篇温婉抒情文章的核心则常常是其中较为桀骜豪迈的一个段落。兴之所至，文意烂漫真切以寄情；心之所向，文义涵远质朴以承道。知机转化，缄默清净；无际俱足，自在永恒。

一个确实充满偏差及脱漏的探讨方向是，点作为位置抽象，诸多点的排列累积仍不具有线的整体属性，也即是，线在包含点的机械静态集合之外，还具有点的机械静态集合所完全不具有的特性，即使是趋于无穷小的线段微元仍然具有点的静态集合所不能完全表示的作为线的性质；引入点的近零动态邻域等特征，或是进一步深入刻画点与线关系的途径之一；截止到目前，诸多数学成就高峰中，Newton 的微积分思想及其成就仍是数学峰巅之一，为诸多分支方向提供了参考框架；若结合点的近零动态邻域构造、细化解析无穷，进一步给出复变函数阶微积分形式及其几何意义，则将为诸如真空的诸层背景及其能量形式、质量来源及其分布间隙、粒子生成及湮灭、天体形成及运转轨迹、大规模星系演化及其之间的相互作用等更广泛的自然现象演化过程提供更强有力的描述途径，更深刻地阐释激励、演化、守恒三位一体的动力学方程内涵。

在这其中，次第渐进的逻辑语言展开或方程解析描述一般仅是祖师级重要著述的框架表象，而其主旨义趣则多凝聚在阐释关于世出世本相一如的部分引导性证悟途径指向及自如运用方法开示；成就仅是阶段性台阶，所谓的客观规律及真理仅是用来参考的动态尺度工具；以科学为初阶导引，以内证自觉为根本，以平等觉他为遍历示现，以离相觉行圆满为至道究竟。

历代祖师级人物，逐步隐忍成长，适机超常发挥晋阶，次第连接及激发更高层背景反应，进而适应并参与改变诸层背景性质，兼容教化善巧引导诸层面演化趋势，是其根本特征。

众生共业化变局，层层因果幻规律；学人执著解究竟，智者离相出递续。

回望至少三千多年以来的历史，审视现在，在较为简略的趋势性层面，从约公元前 1000 年前后 Siddhartha 的终极无限背景亲证到公元 1690 年前后 Newton 的自然哲学数理框架，先后代表性地产生了六次大的准周期性成就，其时间间隔约为 510 年~560 年左右；这系列准周期成就成为由 Siddhartha 圆融智慧层面直接传承的更长更显著准周期大波动的中间诸小波动组成部分。在这数千年的岁月长河中，诸多社会领袖、思想家及学者的卓越探索成就形成了其中的系列浪花及涟漪，迈向并引导觉悟是其中的大方向；圣者历示主线，后学觉行实践。

如此，即可对未来一千年内初步展望，在 Newton 之后，成就低于 Siddhartha 而高于或似于 Newton 的近二位祖师级代表人物将分别依次出现在约公元 2200 年~2250 年前后与公元 2750 年~2800 年前后，其部分成就标志是建立诸如（或可类比）复变函数阶（或复变函数维）微积分理论体系及与微积分思想相并行的数学分支体系，并至少给出更为基本的物理学常数及相应层面的能量交换方程与信息构成方程，进而自然而然地给出与之相密切关联的诸如真空的诸多层面背景构造、关于诸如 Newton 引力常数和 Planck 量子常数及其若干相关更基本普适常数的系列解析展开方程、粒子与星系的统一描述方程、生命本相及其轮转的信息编辑优化、生死一体幻相模式与适机超越和多世界自由往来途径等；生命的极限及轮转递续，思想的超越及知机传承，智慧的开启及无相慈悲，为其主线脉络的基底构成部分。

由是隐约间，几乎就能看见未来从 Newton 数理思想至诚朝向 Siddhartha 普适智慧的匍匐行者。

自然大道的微妙之处在于阶段性近似朴直及动态含容无际映射；这其中，半构造半解析，兼顾计算延展，宏大的多维度叙事风格与简约的开放性隐喻段落式阐释相融合，进而经由知识体系台阶向圆融智慧层面提升；迷时趣觉悟，觉行息诸执，随遇化应现，上显圆融智慧，下示简要知识，是现在乃至未来一段时期一流科学家的重要研究途径及成果要旨表述方式。

此连接过去与现在并延伸向未来的描述仍是趋势性的，当予简略解析及注释，以供参考。

极致上，法本无生，况复余者；是故举心笔墨动念闲谈旨在随顺因缘趣向觉悟，衍无相慧剑，化离形渡船。

连接 昨日开田人，今朝启经论；随遇一笑过，无住解前因。

解析 宏观一条线，细微有断面；断面现结构，结构周期变；
显隐无穷尽，极微见宏观；见分向至道，清净亦宛然。

注释 平川接山岭，翠湖映雪峰；沧海漫天际，桑田通幽境；
阡陌绕聚落，客旅顾行影；临高望乡关，别时依柳青；
云路几多梦，短亭连长亭；昏晓示迁流，疏林衍钟声；
默然入空寂，离相过化城；回向现俱足，至道原假名。

1.1 非线性动力学方程的自嵌套特征与连接方程的构造形式

1.1.1 一种简洁的非线性动力学微分方程自嵌套形式及长程特征函数构造表述

对于较为广泛的现象演化过程, 包括具有趋势极限与细节波动相复合的演化过程, 以及若干状态之间的转化过程, 在数理解析层面, 一般可构建诸项因素参量相互关系较为全面的多变量微分方程组; 多变量微分方程组在消元后的一简化表述, 在适当略去其中高阶项及高次项后, 部分地可直接构造或近似表示为普适简洁的二阶非线性动力学微分方程形式

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi_{IE} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = \psi_{EE}, \quad (1.1)$$

式中 x 、 y 为关联参量, 或有关参量的函数 (复合参量); ϖ_1 、 ϖ_2 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 皆为系数; ξ_{IE} 为内激励函数, ψ_{EE} 为外激励函数; ξ_2 、 ξ_3 是具有非线性极限特征的函数。

方程 (1.1) 式作为描述现象演化过程多变量微分方程组经消元化简并略去高阶项及高次项后的近似形式, 本质上诸系数函数及激励函数多具有方程 (1.1) 式中全部或部分项数耦合的形式, 进而其内诸系数函数及激励函数又可分别单成方程 (1.1) 式形式表述, 如是递续多维向诸层耦合嵌套, 而参量 y 亦为上一层另一组关联参量形如方程 (1.1) 式中的一系函数或一激励函数, 即在一般情况下方程 (1.1) 式具有诸层自嵌套的内秉特征, 是一自嵌套非线性动力学微分方程, 或是以自嵌套为主的非线性动力学微分方程, 其是方程谱系或规律谱阵中的集约等效节点或延伸环节, 整体上方程谱系或规律谱阵具有近似的分形构造, 在对现象演化进行局部分析探讨时诸系数函数及激励函数近似地取为简单函数形式乃至等效为常量表述。

方程 (1.1) 式可将非渐变连续参量拓展平滑为渐变连续参量在趋势性方向或轮廓层面予以刻画, 其阶段性地同时兼顾短程细节变化、中程包络波动与长程大略趋势, 嵌套结构形式阐释诸自然现象演化过程之间普遍关联影响且层层映射转换的根本特征; 一般地, 大的战略朝向确认后, 机动灵活地长程坚持累积, 终将有所获益成就, 乃至豁然心开, 直证人生真谛。

方程 (1.1) 式中的系数函数及激励函数共 7 个, 将内激励函数与外激励函数合并等效为 1 个综合激励函数, 诸函数物理学意义仍较明显, 其等效形式为

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = \psi_{EE} - \xi_{IE},$$

其中当 $\varpi_2 \neq 0$ 时, 方程 (1.1) 式可进一步合并简化为等效形式

$$\frac{\varpi_1}{\varpi_2} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\xi_1}{\varpi_2} y + \frac{\xi_2}{\varpi_2} y^2 + \frac{\xi_3}{\varpi_2} y^3 = \frac{\psi_{EE} - \xi_{IE}}{\varpi_2};$$

即在物理学意义上, 方程 (1.1) 式中有系数函数及激励函数共 7 个, 而在数学方程表示及处理上, 可进行相应的化简合并, 分别成为新的主要是数学性质的复合函数或复合参量, 其物理意义逐渐淡化, 再经由数学方法解出解析解或近似等效解析解后, 解中的各复合参量又相应地具有明确的物理意义, 这是物理学方程创建表述与数学处理分析方法相互促进发展的要义所在。

简单地, 当方程 (1.1) 式中 ξ_{IE} 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 皆为常数时, 其所对应的多项式部分可等效为方程中一长程特征函数 $L(y)$ 在一点 y_{0a} 处 Taylor 级数展开式

$$L(y) = v_0 + v_1(y - y_{0a}) + v_2(y - y_{0a})^2 + v_3(y - y_{0a})^3 + v_4(y - y_{0a})^4 + v_5(y - y_{0a})^5 + \cdots,$$

取三次项后截断略去级数余项的合并化简近似表述形式; 这里 v_0 、 v_1 、 v_2 、 v_3 、 v_4 、 v_5 等皆为函数 $L(y)$ 作 Taylor 级数展开时的常系数项。

更直接地在机理描述的方程构造方向, 长程特征函数 $L(y)$ 有系列嵌套模式的近似形式

$$L(y) \approx \tau_{a1} - \tau_{b1}y(\tau_{a2} - \tau_{b2}y(\tau_{a3} - \tau_{b3}y(\tau_{a4} - \tau_{b4}y(\tau_{a5} - \tau_{b5}y(\tau_{a6} - \cdots))))), \quad (1.2)$$

这里 τ_{a1} 、 τ_{a2} 、 τ_{a3} 、 τ_{a4} 、 τ_{a5} 、 τ_{a6} 及 τ_{b1} 、 τ_{b2} 、 τ_{b3} 、 τ_{b4} 、 τ_{b5} 等分别为相应层面嵌套模式的常数项; 方程 (1.1) 式中 $\xi_{IE} = \tau_{a1}$, $\xi_1 = -\tau_{b1}\tau_{a2}$, $\xi_2 = \tau_{b1}\tau_{b2}\tau_{a3}$, $\xi_3 = -\tau_{b1}\tau_{b2}\tau_{b3}\tau_{a4}$ 。

对于构造方程 (1.2) 式, 当 τ_{a1} 、 τ_{a2} 、 τ_{a3} 、 τ_{a4} 、 τ_{a5} 、 τ_{a6} 皆不为 0 时, 其可简化为

$$L(y) \approx \tau_{a1}[1 - \tau_{c1}y(1 - \tau_{c2}y(1 - \tau_{c3}y(1 - \tau_{c4}y(1 - \tau_{c5}y(1 - \cdots)))))], \quad (1.3)$$

这里 $\tau_{c1} = \tau_{a1}^{-1}\tau_{b1}\tau_{a2}$, $\tau_{c2} = \tau_{a2}^{-1}\tau_{b2}\tau_{a3}$, $\tau_{c3} = \tau_{a3}^{-1}\tau_{b3}\tau_{a4}$, $\tau_{c4} = \tau_{a4}^{-1}\tau_{b4}\tau_{a5}$, $\tau_{c5} = \tau_{a5}^{-1}\tau_{b5}\tau_{a6}$, 其分别为相应层面嵌套模式的比例常数; 方程 (1.1) 式中 $\xi_{IE} = \tau_{a1}$, $\xi_1 = -\tau_{a1}\tau_{c1}$, $\xi_2 = \tau_{a1}\tau_{c1}\tau_{c2}$, $\xi_3 = -\tau_{a1}\tau_{c1}\tau_{c2}\tau_{c3}$ 。

方程(1.2)式侧重于物理机理刻画, 方程(1.3)式侧重于数学形式表述; 构造及展开的主旨意义在于使方程中的未知函数能够诸层次阶段性地等效为一系列已知函数或近似常数的复合运算替代表示。

方程(1.1)式具有条件极限解(诸如饱和过程及蠕变过程)、变频波动解、极限与波动复合解等诸多解形式, 其中包括对现象从一种状态到另一种状态演化过程的普适阐释。虽然方程(1.1)式不具有诸条件解线性叠加运算性质, 但仍可通过诸条件解及其拓展形式讨论其特性。

对于方程(1.1)式, 在不考虑饱和过程细节波动情况下, 特别简单地, 当 $\varpi_2 = 0$ 、 $\varpi_1 \neq 0$ 、 $\xi_3 = 0$ 时, 则方程(1.1)式在 $\xi_2 \neq 0$ 与 $\xi_2 = 0$ 二种情况下的形式分别成为

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \xi_2 (y - y_0)^2 + v_0 = 0, \quad \xi_2 \neq 0 \quad (1.4)$$

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \xi_{IE} + \xi_1 y = \psi_{EE}, \quad \xi_2 = 0 \quad (1.5)$$

式中 $y_0 = -0.5\xi_1\xi_2^{-1}$, $v_0 = -\psi_{EE} + \xi_{IE} - 0.25\xi_1^2\xi_2^{-1}$ 。

进而当 ϖ_1 、 ξ_{IE} 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ψ_{EE} 皆为常量时, 方程(1.4)、(1.5)二式的解分别为

$$y = \begin{cases} y_0 + A \tan[\alpha(x - x_0)], & \xi_2 v_0 > 0, \quad \alpha = \varpi_1^{-1} \sqrt{\xi_2 v_0}, \quad A = -\sqrt{\xi_2^{-1} v_0} \\ y_0 + A \tanh[\alpha(x - x_0)], & \xi_2 v_0 < 0, \quad \alpha = \varpi_1^{-1} \sqrt{-\xi_2 v_0}, \quad A = \sqrt{-\xi_2^{-1} v_0} \\ y_0 + \varpi_1 \xi_2^{-1} [x + v_C]^{-1}, & v_0 = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} |y - \xi_1^{-1}(\psi_{EE} - \xi_{IE})| = |y_{x=0} - \xi_1^{-1}(\psi_{EE} - \xi_{IE})| \exp(-\varpi_1^{-1} \xi_1 x), & \xi_1 \neq 0 \\ y = y_{x=0} + \varpi_1^{-1} [\psi_{EE} - \xi_{IE}] x, & \xi_1 = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

方程解(1.6)式中 x_0 、 v_C 皆为待定常量。

对于方程(1.1)式, 特别地, 当 $\varpi_1 = \varpi_{N0} + \varpi_{N1}y$ 时, 即得能够兼容二阶线性微分方程及双曲正切方程的最简单非线性方程形式

$$\varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [\varpi_{N0} + \varpi_{N1}y] \frac{dy}{dx} + \xi_1 y = \psi_{EE} - \xi_{IE}, \quad (1.8)$$

式中 ϖ_{N0} 、 ϖ_{N1} 为待定常量。方程(1.8)式具有显著的变频波动特征。

当 ϖ_2 、 ξ_1 、 $\psi_{EE} - \xi_{IE}$ 皆为 x 的函数、 $\varpi_{N1} = 0$ 时, 方程(1.8)式转化为一般的二阶线性微分方程形式; 当 $\varpi_{N1} \neq 0$ 、 $\xi_1 = 0$ 、 $\psi_{EE} = \xi_{IE}$ 、 ϖ_2 为常量时, 其转化为描述双曲正切函数的非线性微分方程形式(或方程(1.4)式的二阶微分方程等效形式)

$$\varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [\varpi_{N0} + \varpi_{N1}y] \frac{dy}{dx} = 0。$$

方程(1.1)式为描述现象演化过程多变量微分方程组的化简后近似表述形式, 结合长程特征函数(1.2)式或(1.3)式, 其解中隐含 $\exp(\alpha(x - x_0))$ 、 $\sin(\alpha(x - x_0))$ 、 $\tan(\alpha(x - x_0))$ 、 $\tanh(\alpha(x - x_0))$ 等函数项, 及其相应适度变形拓展或广义复合函数项等, 对于探讨类如函数 $y = y(t)$ 的广义 Verhulst 模型方程(general Verhulst equation or general Logistic equation)

$$\frac{dy}{dt} = k_{GV} L(y) \quad (1.9)$$

与函数 $u = u(x, t)$ 的广义 Fisher 方程(general Fisher equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b_{GF1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_{GF2} L(u) = 0 \quad (1.10)$$

等非线性微分方程的一般饱和解与一般行波解 $u = u(x + c_0 t)$ 表述形式及更深层次的非线性机理演化规律描述具有参考意义; 这里 k_{GV} 与 b_{GF1} 、 b_{GF2} 为常系数, t 为时间, c_0 为波速。

方程 (1.1) 式仅是一种简洁表述, 带有 3 阶及以上高阶项、4 次及以上高次项的非线性微分方程, 对于覆盖多层次、跨越极端条件下兼顾细微与长程的现象演化趋势描述仍然是重要形式

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \varpi_{i_1} \frac{d^{i_1} y}{dx^{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{n_2} \xi_{i_2} y^{i_2} = \psi_{EE} - \xi_{IE}, \quad (1.11)$$

这里 i_1 、 i_2 、 n_1 、 n_2 皆为自然数, $n_1 \geq 3$ 、 $n_2 \geq 4$; ϖ_{i_1} 、 ξ_{i_2} 皆为系函数。

特别简单地, 由长程特征函数 (1.2) 式或 (1.3) 式, 方程 (1.11) 式可进一步简化近似表示为

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \varpi_{i_1} \frac{d^{i_1} y}{dx^{i_1}} + L(y) = \psi_{EE}.$$

由于方程 (1.1) 式或方程 (1.11) 式在形成过程为微分方程组化简后的近似表述形式, 其解析解或近似等效解析解许多时不能以直接显式给出, 可在研究方向上探讨其参量解近似形式

$$\begin{cases} y \approx y(w), \\ x \approx x(w); \end{cases} \quad (1.12)$$

这里 w 为中间参量。在讨论数理方程解的过程中, 适当探讨其中间参量解及潜势解或背景解是必要的, 可以深入理解数理方程解之间的转化机理及内在联系。

1.1.2 数据曲线间断区域的连接方程形式构造

从数学的普适构造角度考察, 对于数据曲线间断区域, 在数据曲线间断区域的连接曲线方程 $y = f(x)$ 形式构造方向, 可根据具体间断区域始点局部平均斜率 k_S 及终点局部平均斜率 k_E 的特征构造多种连接曲线方程形式; 其中的要点为连接方程在兼顾数据曲线间断区域二个端点邻域平均斜率的同时, 于平衡点附近的斜率 η_{SE0} 最大限度地趋近于间断区域二个端点间直线的斜率 k_{SE0} , 即有连接数据曲线间断区域的最优或最简洁路径光滑曲线特征方程

$$\eta_S \approx k_S, \quad \eta_E \approx k_E, \quad \eta_{SE0} \rightarrow k_{SE0}; \quad (1.13)$$

这里 η_S 、 η_E 分别为连接方程在数据曲线间断区域的始点局部平均斜率、终点局部平均斜率。

简洁地, 可将连接方程 $y = f(x)$ 在曲线间断区域二个端点局部平均斜率近似取为具有广泛适应性的指数函数形式

$$\begin{cases} \eta_S = \varsigma_S \exp[-\beta_{S0}(x - x_0)], \\ \eta_E = \varsigma_E \exp[\beta_{E0}(x - x_0)]; \end{cases} \quad (1.14)$$

式中 ς_S 、 ς_E 、 β_{S0} 、 β_{E0} 为待定系数。

在连接方程的构造方向上进一步将 (1.14) 式拆分为分式形式

$$\begin{cases} \eta_S = \varsigma_S \exp[-\beta_{S0}(x - x_0)] = \varsigma_S \frac{\exp[-\beta_{S1}(x - x_0)]}{\exp[-\beta_{S2}(x - x_0)]}, \\ \eta_E = \varsigma_E \exp[\beta_{E0}(x - x_0)] = \varsigma_E \frac{\exp[\beta_{E1}(x - x_0)]}{\exp[\beta_{E2}(x - x_0)]}; \end{cases} \quad (1.15)$$

积分 (1.15) 式, 得连接曲线方程于始点局部邻域的 y_{SE} 、终点局部邻域的 y_{EE} 可表示为

$$\begin{cases} y_{SE} = y_{S0} - \varsigma_S [\beta_{S1} - \beta_{S2}]^{-1} \frac{\exp[-\beta_{S1}(x - x_0)]}{\exp[-\beta_{S2}(x - x_0)]}, \\ y_{EE} = y_{E0} + \varsigma_E [\beta_{E1} - \beta_{E2}]^{-1} \frac{\exp[\beta_{E1}(x - x_0)]}{\exp[\beta_{E2}(x - x_0)]}; \end{cases} \quad (1.16)$$

式中 β_{S1} 、 β_{S2} 、 β_{E1} 、 β_{E2} 为待定系数, $\beta_{S0} = \beta_{S1} - \beta_{S2}$ 、 $\beta_{E0} = \beta_{E1} - \beta_{E2}$; y_{S0} 、 y_{E0} 为积分常数。

从函数构造角度,符合二端点方程(1.16)式的连接方程有多种表述形式,其中方程(1.16)式较为简洁,并可由此进一步拓展普适形式。

在平衡点处考虑连接曲线方程 $y(x=x_0)=y_0$, 则在极限情况下,由上述二个端点邻域方程(1.16)式即可得于此构造方向的数据曲线间断区域较简洁的连接曲线方程形式为

$$y = y_0 - \frac{A_{E1} - A_{S1}}{A_{E2} + A_{S2}} + \frac{A_{E1} \exp[\beta_{E1}(x-x_0)] - A_{S1} \exp[-\beta_{S1}(x-x_0)]}{A_{E2} \exp[\beta_{E2}(x-x_0)] + A_{S2} \exp[-\beta_{S2}(x-x_0)]}, \quad (1.17)$$

式中 A_{S1} 、 A_{S2} 、 A_{E1} 、 A_{E2} 为待定系数;

$$y_0 - \frac{A_{E1} - A_{S1}}{A_{E2} + A_{S2}} = y_{S0} = y_{E0}, \quad \frac{A_{S1}}{A_{S2}} = \frac{\zeta_S}{\beta_{S1} - \beta_{S2}}, \quad \frac{A_{E1}}{A_{E2}} = \frac{\zeta_E}{\beta_{E1} - \beta_{E2}}.$$

方程(1.17)式可表示为

$$y = y_0 - \frac{A_{E1} - A_{S1}}{A_{E2} + A_{S2}} + \frac{A_{E1}}{A_{E2}} \frac{\exp[\beta_{E1}(x-x_0)] - A_{S1} A_{E1}^{-1} \exp[-\beta_{S1}(x-x_0)]}{\exp[\beta_{E2}(x-x_0)] + A_{S2} A_{E2}^{-1} \exp[-\beta_{S2}(x-x_0)]};$$

或者

$$y = y_0 - \frac{A_{E1} - A_{S1}}{A_{E2} + A_{S2}} + \frac{A_{S1}}{A_{S2}} \frac{A_{E1} A_{S1}^{-1} \exp[\beta_{E1}(x-x_0)] - \exp[-\beta_{S1}(x-x_0)]}{A_{E2} A_{S2}^{-1} \exp[\beta_{E2}(x-x_0)] + \exp[-\beta_{S2}(x-x_0)]}.$$

至为简洁地,当 $A_{S1} = A_{E1}$ 、 $A_{S2} = A_{E2}$ 时,方程(1.14)式成为

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\beta_{E1}(x-x_0)] - \exp[-\beta_{S1}(x-x_0)]}{\exp[\beta_{E2}(x-x_0)] + \exp[-\beta_{S2}(x-x_0)]}, \quad (1.18)$$

式中 A 为常量; $y_0 = y_{S0} = y_{E0}$,

$$A = A_{S1} A_{S2}^{-1} = A_{E1} A_{E2}^{-1} = \zeta_S [\beta_{S1} - \beta_{S2}]^{-1} = \zeta_E [\beta_{E1} - \beta_{E2}]^{-1}.$$

对方程(1.18)式的分子分母同时乘以指数因子项 $\exp[\beta_{SE0}(x-x_0)]$, 这里 β_{SE0} 为待定常量, 即有

$$y = y_0 + A \frac{\exp[(\beta_{E1} + \beta_{SE0})(x-x_0)] - \exp[-(\beta_{S1} - \beta_{SE0})(x-x_0)]}{\exp[(\beta_{E2} + \beta_{SE0})(x-x_0)] + \exp[-(\beta_{S2} - \beta_{SE0})(x-x_0)]};$$

取上式分母中 $\beta_{E2} + \beta_{SE0} = \beta_{S2} - \beta_{SE0}$, 解得待定常量 $\beta_{SE0} = 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2})$; 得

$$\begin{aligned} y &= y_0 + A \frac{\exp[(\beta_{E1} + 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}))(x-x_0)] - \exp[-(\beta_{S1} - 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}))(x-x_0)]}{\exp[(\beta_{E2} + 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}))(x-x_0)] + \exp[-(\beta_{S2} - 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}))(x-x_0)]} \\ &= y_0 + A \frac{\exp[(\beta_{E1} + 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}))(x-x_0)] - \exp[-(\beta_{S1} - 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}))(x-x_0)]}{2 \cosh[0.5(\beta_{S2} + \beta_{E2})(x-x_0)]}; \end{aligned}$$

即连接方程(1.18)式可化简等效为简单形式

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]}, \quad (1.19)$$

式中常量 α_1 、 α_2 、 α_3 分别为

$$\alpha_1 = \beta_{E1} + 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}),$$

$$\alpha_2 = \beta_{S1} - 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}),$$

$$\alpha_3 = 0.5(\beta_{S2} + \beta_{E2}).$$

由方程(1.19)式得其一阶及二阶导数方程或微分方程形式分别为

$$\frac{dy}{dx} = A \frac{\alpha_1 \exp[\alpha_1(x-x_0)] + \alpha_2 \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]} - \alpha_3 (y - y_0) \tanh[\alpha_3(x-x_0)]; \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & A \frac{\alpha_1^2 \exp[\alpha_1(x-x_0)] - \alpha_2^2 \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]} \\ & - A \alpha_3 \tanh[\alpha_3(x-x_0)] \frac{\alpha_1 \exp[\alpha_1(x-x_0)] + \alpha_2 \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]} \\ & - \alpha_3 \tanh[\alpha_3(x-x_0)] \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha_3^2(y-y_0)}{\cosh^2[\alpha_3(x-x_0)]}; \end{aligned} \quad (1.21)$$

故方程 (1.19) 式在平衡点 $x = x_0$ 、 $y(x = x_0) = y_0$ 处，其一阶及二阶导数方程值分别为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} A(\alpha_1 + \alpha_2); \quad (1.22)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} A(\alpha_1^2 - \alpha_2^2). \quad (1.23)$$

方程 (1.23) 式表明，方程 (1.19) 式为偏对称方程形式；当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时，方程曲线的拐点坐标与平衡点坐标处于同一位置。

方程 (1.19) 式连续光滑，具有多阶导数；其兼顾了数据曲线间断区域二个端点邻域平均斜率，且于平衡点附近的斜率可最大限度地趋近于间断区域二个端点间直线的斜率。

方程 (1.20)、(1.21) 二式亦表明，以逻辑解析为内核的普适构造方法建立的连接方程 (1.19) 式，并不直接对应着较为简洁的单一非线性动力学微分方程形式，而可能为参量解 (1.12) 式的一种近似表述。

1.1.3 连接方程与 Logistic 函数的关系

对于方程 (1.19) 式，一方面，当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 、 $\alpha_3 = \beta$ 时，其形式简化为

$$y = y_0 + A \frac{\sinh[\alpha(x-x_0)]}{\cosh[\beta(x-x_0)]}; \quad (1.24)$$

当 $\beta = \alpha$ 时，方程 (1.24) 式简化为方程 (1.1) 式条件解析解 (1.6) 式中双曲正切函数

$$y = y_0 + A \tanh[\alpha(x-x_0)]. \quad (1.25)$$

另一方面，上述分析亦表明，方程 (1.17) 式及其化简方程 (1.19) 式亦皆为方程 (1.1) 式条件解析解 (1.6) 式中双曲正切函数

$$\begin{aligned} y &= y_0 + A \frac{\sinh[\alpha(x-x_0)]}{\cosh[\alpha(x-x_0)]} \\ &= y_0 + A \frac{\exp[\alpha(x-x_0)] - \exp[-\alpha(x-x_0)]}{\exp[\alpha(x-x_0)] + \exp[-\alpha(x-x_0)]} \end{aligned}$$

的一般拓展形式，即方程 (1.19) 式可为方程 (1.1) 式的一近似等效解析解形式。

由双曲正切函数 (1.25) 式得

$$\begin{aligned} y &= y_0 - A + 2A \frac{\exp[\alpha(x-x_0)]}{\exp[\alpha(x-x_0)] + \exp[-\alpha(x-x_0)]} \\ &= y_0 - A + 2A \frac{1}{1 + \exp[-2\alpha(x-x_0)]}; \end{aligned}$$

取 $y_0 = A$ ，则上式转化为下面传统描述 S 型曲线的 Logistic 函数形式

$$y = \frac{2y_0}{1 + \exp[-2\alpha(x-x_0)]}; \quad (1.26)$$

即描述经典 S 型曲线的 Logistic 函数 (1.26) 为连接方程 (1.19) 式的简化表述形式。

由方程 (1.23) 式，方程 (1.24)、(1.25) 二式曲线拐点坐标与平衡点坐标处于同一位置，属于理想情况下的状态；具体饱和过程一般多是呈现偏对称或欠对称（弱对称）状态。

1.1.4 广义极限方程或广义偏对称方程（欠对称或弱对称方程）构造形式

偏对称方程（1.19）式主要是兼顾曲线在开始与结束二段特征的趋势性构造方程形式。

一般地，对于较为广泛的极限过程（包括饱和过程、蠕变过程、材料击穿过程、扩散过程等），在需考虑曲线在中间变化过程的特征时，可直接参照方程（1.19）式将其构造为曲线在开始、中间、结束三段特征分式拓展的如下二个简洁的广义偏对称（欠对称或弱对称）方程或广义极限方程形式，以适应更为广泛的现象演化极限过程的趋势性描述

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_{1FE}(x-x_0)] - \kappa_{FE} \exp[-\alpha_{1FE}(x-x_0)] - (1-\kappa_{FE}) \exp[-\alpha_{2FE}(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_{3FE}(x-x_0)]}, \quad (1.27)$$

$$y = y_0 + A \frac{\lambda_{FE} \exp[\alpha_{1FE}(x-x_0)] + (1-\lambda_{FE}) \exp[\alpha_{2FE}(x-x_0)] - \exp[-\alpha_{1FE}(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_{3FE}(x-x_0)]}, \quad (1.28)$$

式中 A 、 α_{1FE} 、 α_{2FE} 、 α_{3FE} 、 κ_{FE} 、 λ_{FE} 为待定常量， $0 \leq \kappa_{FE} \leq 1$ ， $0 \leq \lambda_{FE} \leq 1$ ； x_0 、 y_0 为平衡点坐标，在平衡点处 $y(x=x_0) = y_0$ 。

其中对于饱和过程曲线，当其前段为水平线时，对于方程（1.28）式，即 $\alpha_{1FE} = \alpha_{3FE}$ ，则有

$$y = y_0 + A \frac{\lambda_{FE} \exp[\alpha_{1FE}(x-x_0)] + (1-\lambda_{FE}) \exp[\alpha_{2FE}(x-x_0)] - \exp[-\alpha_{1FE}(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_{1FE}(x-x_0)]}. \quad (1.29)$$

当饱和过程曲线后段为水平线时，对于方程（1.27）式，即 $\alpha_{1FE} = \alpha_{3FE}$ ，则有

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_{1FE}(x-x_0)] - \kappa_{FE} \exp[-\alpha_{1FE}(x-x_0)] - (1-\kappa_{FE}) \exp[-\alpha_{2FE}(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_{1FE}(x-x_0)]}. \quad (1.30)$$

上述广义偏对称方程（1.27）式～（1.30）式即为一般极限方程形式或广义极限方程形式，兼顾了曲线在开始、中间、结束三段特征，兼顾了现象演化的中间过程趋势形态。

当饱和过程前段与后段皆为水平线时，皆有 $\alpha_{1FE} = \alpha_{2FE} = \alpha$ ， α 为待定常量，方程（1.29）、（1.30）二式亦皆退化为经典的双曲正切函数形式

$$y = y_0 + A \tanh[\alpha(x-x_0)]. \quad (1.31)$$

更为一般地，当饱和过程前段与后段皆为水平线时，可将构造方程（1.19）式表示为曲线在开始、中间、结束三段趋势性分式拓展的二个广义偏对称或欠对称方程 y_{FUS} 、 y_{BUS} 形式

$$\begin{aligned} y_{FUS} &= y_0 + A \frac{\exp[\alpha_{1FE}(x-x_0)] - \kappa_{FE} \exp[-\alpha_{1FE}(x-x_0)] - (1-\kappa_{FE}) \exp[-\alpha_{2FE}(x-x_0)]}{\exp[\alpha_{1FE}(x-x_0)] + \kappa_{FE} \exp[-\alpha_{1FE}(x-x_0)] + (1-\kappa_{FE}) \exp[-\alpha_{2FE}(x-x_0)]} \\ &= y_0 - A + \frac{2A}{1 + \kappa_{FE} \exp[-2\alpha_{1FE}(x-x_0)] + (1-\kappa_{FE}) \exp[-(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x-x_0)]}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} y_{BUS} &= y_0 + A \frac{\lambda_{FE} \exp[\alpha_{1FE}(x-x_0)] + (1-\lambda_{FE}) \exp[\alpha_{2FE}(x-x_0)] - \exp[-\alpha_{1FE}(x-x_0)]}{\lambda_{FE} \exp[\alpha_{1FE}(x-x_0)] + (1-\lambda_{FE}) \exp[\alpha_{2FE}(x-x_0)] + \exp[-\alpha_{1FE}(x-x_0)]} \\ &= y_0 + A - \frac{2A}{1 + \lambda_{FE} \exp[2\alpha_{1FE}(x-x_0)] + (1-\lambda_{FE}) \exp[(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x-x_0)]}; \end{aligned} \quad (1.33)$$

在上二式中 y_{FUS} 为前偏对称方程， y_{BUS} 为后偏对称方程； A 、 α_{1FE} 、 α_{2FE} 、 α_{3FE} 、 κ_{FE} 、 λ_{FE} 为待定常量， $0 \leq \kappa_{FE} \leq 1$ 、 $0 \leq \lambda_{FE} \leq 1$ ； x_0 、 y_0 为平衡点坐标， $y(x=x_0) = y_0$ 。

方程（1.19）式为曲线在开始、结束二端约束构造形式，方程（1.27）式～（1.30）式、（1.32）式、（1.33）式则为曲线在开始、中间、结束三段约束构造形式，对现象演化过程的整体趋势性描述具有更广泛的适应性。

由方程（1.32）式得其导数方程或一阶微分方程形式为

$$\begin{aligned} \frac{dy_{FUS}}{dx} &= \frac{[y_{FUS} - y_0 + A]^2}{2A} [2\alpha_{1FE} \kappa_{FE} \exp[-2\alpha_{1FE}(x-x_0)] \\ &\quad + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1-\kappa_{FE}) \exp[-(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x-x_0)]]; \end{aligned} \quad (1.34)$$

由方程 (1.31) 式得其导数或一阶微分方程形式为

$$\frac{dy_{BUS}}{dx} = \frac{[y_0 + A - y_{BUS}]^2}{2A} [2\alpha_{1FE}\lambda_{FE} \exp[2\alpha_{1FE}(x - x_0)] + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \lambda_{FE}) \exp[(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]] \quad (1.35)$$

由方程 (1.34) 式得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{FUS}}{dx^2} = & A^{-1} [y_{FUS} - y_0 + A] [2\alpha_{1FE}\kappa_{FE} \exp[-2\alpha_{1FE}(x - x_0)] \\ & + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \kappa_{FE}) \exp[-(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]] \frac{dy_{FUS}}{dx} \\ & - 0.5A^{-1} [y_{FUS} - y_0 + A]^2 [4\alpha_{1FE}^2 \kappa_{FE} \exp[-2\alpha_{1FE}(x - x_0)] \\ & + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})^2 (1 - \kappa_{FE}) \exp[-(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]]; \quad (1.36) \end{aligned}$$

由方程 (1.35) 式得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{BUS}}{dx^2} = & -A^{-1} [y_0 + A - y_{BUS}] [2\alpha_{1FE}\lambda_{FE} \exp[2\alpha_{1FE}(x - x_0)] \\ & + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \lambda_{FE}) \exp[(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]] \frac{dy_{BUS}}{dx} \\ & + 0.5A^{-1} [y_0 + A - y_{BUS}]^2 [4\alpha_{1FE}^2 \lambda_{FE} \exp[2\alpha_{1FE}(x - x_0)] \\ & + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})^2 (1 - \lambda_{FE}) \exp[(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]]; \quad (1.37) \end{aligned}$$

在平衡点 $x = x_0$ 处, 由方程 (1.32) 式、(1.34) 式得

$$y_{FUS} = y_0, \quad \frac{dy_{FUS}}{dx} = 0.5A[2\alpha_{1FE}\kappa_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \kappa_{FE})]; \quad (1.38)$$

方程 (1.31) 式、(1.33) 式得

$$y_{BUS} = y_0, \quad \frac{dy_{BUS}}{dx} = 0.5A[2\alpha_{1FE}\lambda_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \lambda_{FE})]; \quad (1.39)$$

则在平衡点 $x = x_0$ 处方程 (1.36) 式成为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{FUS}}{dx^2} = & A^{-1} [y_0 - y_0 + A] [2\alpha_{1FE}\kappa_{FE} \\ & + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \kappa_{FE})] [0.5A[2\alpha_{1FE}\kappa_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \kappa_{FE})]] \\ & - 0.5A^{-1} [y_0 - y_0 + A]^2 [4\alpha_{1FE}^2 \kappa_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})^2 (1 - \kappa_{FE})] \\ = & 0.5A[[2\alpha_{1FE}\kappa_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \kappa_{FE})]^2 - 4\alpha_{1FE}^2 \kappa_{FE} - (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})^2 (1 - \kappa_{FE})] \\ = & 0.5A\kappa_{FE}(1 - \kappa_{FE})[4\alpha_{1FE}(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE}) - 4\alpha_{1FE}^2 - (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})^2] \\ = & 0.5A\kappa_{FE}(1 - \kappa_{FE})[2\alpha_{1FE}\alpha_{2FE} - \alpha_{1FE}^2 - \alpha_{2FE}^2] \\ = & -0.5A\kappa_{FE}(1 - \kappa_{FE})[\alpha_{1FE} - \alpha_{2FE}]^2; \quad (1.40) \end{aligned}$$

方程 (1.37) 式成为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{BUS}}{dx^2} = & -A^{-1} [y_0 + A - y_0] [2\alpha_{1FE}\lambda_{FE} \\ & + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \lambda_{FE})] [0.5A[2\alpha_{1FE}\lambda_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \lambda_{FE})]] \\ & + 0.5A^{-1} [y_0 + A - y_0]^2 [4\alpha_{1FE}^2 \lambda_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})^2 (1 - \lambda_{FE})] \\ = & 0.5A[4\alpha_{1FE}^2 \lambda_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})^2 (1 - \lambda_{FE}) - [2\alpha_{1FE}\lambda_{FE} + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(1 - \lambda_{FE})]^2] \\ = & 0.5A\lambda_{FE}(1 - \lambda_{FE})[(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})^2 - 4\alpha_{1FE}(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE}) + 4\alpha_{1FE}^2] \\ = & 0.5A\lambda_{FE}(1 - \lambda_{FE})[\alpha_{1FE}^2 - 2\alpha_{1FE}\alpha_{2FE} + \alpha_{2FE}^2] \\ = & 0.5A\lambda_{FE}(1 - \lambda_{FE})[\alpha_{1FE} - \alpha_{2FE}]^2. \quad (1.41) \end{aligned}$$

依据方程 (1.40) 式、(1.41) 式, 因 $0 \leq \kappa_{FE} \leq 1$ 、 $0 \leq \lambda_{FE} \leq 1$, 故当 $A > 0$ 时, 在平衡点 $x = x_0$ 处有

$$\frac{d^2 y_{FUS}}{dx^2} = -0.5A\kappa_{FE}(1-\kappa_{FE})[\alpha_{1FE} - \alpha_{2FE}]^2 \leq 0, \quad (1.42)$$

$$\frac{d^2 y_{BUS}}{dx^2} = 0.5A\lambda_{FE}(1-\lambda_{FE})[\alpha_{1FE} - \alpha_{2FE}]^2 \geq 0; \quad (1.43)$$

当 $A < 0$ 时, 有

$$\frac{d^2 y_{FUS}}{dx^2} = -0.5A\kappa_{FE}(1-\kappa_{FE})[\alpha_{1FE} - \alpha_{2FE}]^2 \geq 0, \quad (1.44)$$

$$\frac{d^2 y_{BUS}}{dx^2} = 0.5A\lambda_{FE}(1-\lambda_{FE})[\alpha_{1FE} - \alpha_{2FE}]^2 \leq 0. \quad (1.45)$$

在方程 (1.32) 式、(1.33) 式的曲线拐点处, 因当 $A > 0$ 时二阶导数方程曲线从正向负变化经过 x 轴, 当 $A < 0$ 时二阶导数方程曲线从负向正变化经过 x 轴; 故由方程 (1.32) 式、(1.44) 式, 得方程 (1.32) 式曲线的拐点坐标处在平衡点坐标之前或与之重合位置, 即方程 (1.32) 式为前偏对称方程形式; 由方程 (1.43) 式、(1.45) 式, 得方程 (1.33) 式曲线的拐点坐标处在平衡点坐标之后或与之重合位置, 即方程 (1.33) 式为后偏对称方程形式。

同样, 方程 (1.34) ~ (1.37) 式亦表明, 以逻辑解析为内核的普适构造方法给出的连接方程 (1.19) 式拓展形式广义偏对称方程 (1.32)、(1.33) 二式, 仍不直接对应着较为简洁的单一非线性动力学微分方程形式, 还可能为参量解 (1.12) 式的一种强近似表述。

由方程 (1.32)、(1.33) 二式, 特别地当 $\kappa_{FE} = 0$ 及 $\lambda_{FE} = 0$ 时, 或当 $\kappa_{FE} = 1$ 及 $\lambda_{FE} = 1$ 时, 二方程皆直接退化为双曲正切函数形式

$$y = y_0 + A \tanh[0.5(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]; \quad (1.46)$$

$$y = y_0 + A \tanh[\alpha_{1FE}(x - x_0)]. \quad (1.47)$$

依据方程 (1.31) 式、(1.32) 式、(1.33) 式, 其在平衡点 $x \approx x_0$ 附近区域的近似展开化简形式分别为

$$\begin{aligned} y &= y_0 + A \tanh[\alpha(x - x_0)] \\ &\approx y_0 + A \frac{[1 + \alpha(x - x_0)] - [1 - \alpha(x - x_0)]}{[1 + \alpha(x - x_0)] + [1 - \alpha(x - x_0)]} \\ &= y_0 + A\alpha(x - x_0); \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} y_{FUS} &= y_0 - A + \frac{2A}{1 + \kappa_{FE} \exp[-2\alpha_{1FE}(x - x_0)] + (1 - \kappa_{FE}) \exp[-(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]} \\ &\approx y_0 - A + \frac{2A}{1 + \kappa_{FE}[1 - 2\alpha_{1FE}(x - x_0)] + (1 - \kappa_{FE})[1 - (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]} \\ &= y_0 - A + \frac{2A}{2 - [(1 + \kappa_{FE})\alpha_{1FE} + (1 - \kappa_{FE})\alpha_{2FE}](x - x_0)} \\ &\approx y_0 - A + A[1 + 0.5[(1 + \kappa_{FE})\alpha_{1FE} + (1 - \kappa_{FE})\alpha_{2FE}](x - x_0)] \\ &= y_0 + 0.5A[(1 + \kappa_{FE})\alpha_{1FE} + (1 - \kappa_{FE})\alpha_{2FE}](x - x_0); \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} y_{BUS} &= y_0 + A - \frac{2A}{1 + \lambda_{FE} \exp[2\alpha_{1FE}(x - x_0)] + (1 - \lambda_{FE}) \exp[(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]} \\ &\approx y_0 + A - \frac{2A}{1 + \lambda_{FE}[1 + 2\alpha_{1FE}(x - x_0)] + (1 - \lambda_{FE})[1 + (\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]} \\ &= y_0 + A - \frac{2A}{2 + [(1 + \lambda_{FE})\alpha_{1FE} + (1 - \lambda_{FE})\alpha_{2FE}](x - x_0)} \\ &\approx y_0 + A - A[1 - 0.5[(1 + \lambda_{FE})\alpha_{1FE} + (1 - \lambda_{FE})\alpha_{2FE}](x - x_0)] \\ &= y_0 + 0.5A[(1 + \lambda_{FE})\alpha_{1FE} + (1 - \lambda_{FE})\alpha_{2FE}](x - x_0). \end{aligned} \quad (1.50)$$

对比在平衡点 $x \approx x_0$ 附近区域的方程 (1.48) 式与 (1.49) 式、(1.50) 式, 可得二组方程 (1.31) 式与 (1.32) 式、方程 (1.31) 式与 (1.33) 式中常数间的趋势性近似关系方程分别为

$$(1 + \kappa_{FE})\alpha_{1FE} + (1 - \kappa_{FE})\alpha_{2FE} \approx 2\alpha, \quad (1.51)$$

$$(1 + \lambda_{FE})\alpha_{1FE} + (1 - \lambda_{FE})\alpha_{2FE} \approx 2\alpha. \quad (1.52)$$

简单地, 在常数 $y_0 = A > 0$ 、 $x_0 = 40$ 时, 前偏对称方程 (1.32) 式及其导数方程 (1.34) 式与后偏对称方程 (1.33) 式及其导数方程 (1.35) 式的曲线形态特征如图 1-1 所示。

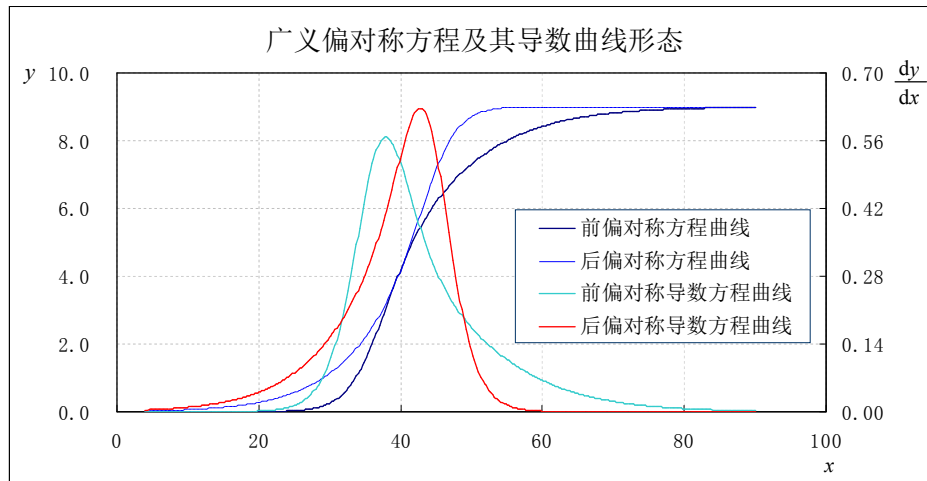


图 1-1 前偏对称(欠对称或弱对称)方程与后偏对称方程及其导数方程曲线形态图

Fig. 1-1 Morphology figure of curves of forward partial-symmetrical equation(weak-symmetrical equation) and backward partial-symmetrical equation and their derivative equations

在图示上, 偏对称方程 (1.32) 式、(1.33) 式主要表现为旋转偏对称或欠对称(弱对称)特征; 而其导数方程形式 (1.34) 式及方程 (1.35) 式则主要表现为轴向偏对称或欠对称特征。

上述广义极限方程或广义偏对称方程形式是描述现象演化过程的广义极限原理层面的方程表述, 可广泛应用于一般极限演化过程在同时兼顾曲线于开始、中间、结束三段特征的趋势性分析, 其包括对一般饱和演化过程、扩散过程、材料蠕变过程、极端情况下细观与宏观统计特征分布等方面的深入探讨研究; 尤其是所建立的现象演化过程基本微分方程组在无法直接给出严格解析解情况下, 可依由上述广义偏对称方程进行趋势性近似解形式构造。

1.2 自然现象演化过程的规律分布谱系(谱阵)——简学或维学纲要大略

1.2.1 自然现象演化过程的规律谱系(谱阵)——简学或维学纲要及证道三步

将方程 (1.1) 式及其近似等效解析解 (1.19) 式(包括由其拓展的广义偏对称方程 (1.27) 式~ (1.30) 式、方程 (1.32) 式及 (1.33) 式等表述形式) 作为描述自然现象演化过程一方程组的趋势性近似解, 尤其是方程 (1.1) 式在一般情况下所具有的自嵌套内秉结构, 可初步对诸多现象予以一个较为完整的阶段性描述刻画; 重要的是, 其在趋势上覆盖了三~四个次序连接的演化子过程, 而相邻子过程一般都具有递进演化性质同时又各具迥然不同的演化特征。其中对于饱和过程, 当将现象演化过程的局域近似定值拓展为中程趋势方程时, 即是将诸多非饱和过程近似拓展为广义饱和过程或广义极限过程; 其有三个层面: 局部区域的定值, 中程的定变化趋势, 长程的定演化规律及演化规律之间的跳转迁移, 乃至更远景的定非定。

在科学理论构建上, 诸多定律或原理都是自然演化过程在阶段或局域上的趋势性乃至切线方向的近似刻画, 都有作为主导方程或主项函数描述的适用范围及相应嵌套结构特征, 其中绝大部分重要的奠基性的定律或原理还包含着方程的基本常数, 这些基本常数本质上皆是对无穷次第相邻层面构造相互作用效果进行综合简化的等效数值, 其包含着无穷次第相邻层面的嵌套内容; 而系列规律之间的连接纽带即多以这些基本常数解析展开为包括更基本常数的方程为核心环节, 通过规律中的基本常数诸级解析展开实现规律之间的转化过渡及跳转迁移, 即一过程规律中的基本常数是包含着更细微或更广阔层面基本常数的局部能量时空尺度方程数值形式近似表示。

在相邻演化规律之间，表现为规律的串联方式及并联方式；其中串联方式主要是逻辑延展递进关系，并联方式主要是逻辑互补关系，如此形成演化规律分布谱系（或谱阵），在构造上具有多维数（或维度，包括分数维、复数维、复变函数维等）本质属性，规律之间亦同简策（简册）；每一规律都有相应具体内容，诸规律联合起来成为阶段性较为完整的描述内容，如此动态的规律谱系（谱阵）逐步接近所描述的目标现象演化过程，且相邻现象演化规律谱系（谱阵）之间亦相互影响。

此如同植物的种子发育成根须、主干、分枝、叶、花、果等系列表现状态，诸多植物之间还进行着交互作用；亦同因陀罗网(Indra's net)，布列层嵌、影映交辉，含摄遍历、重重无尽。

在现象界，基于“凡事皆可因果解析”这一基本准则，将上述关于构造方式的自然现象演化过程规律分布谱系或规律分布谱阵及其连接纽带的学问现称为简学(Jiansics, Jiansism)或维学(Dimennics, Dimennism)；其纲要大略有下面三个基本定则：

A 由自然现象演化系列相邻过程的系列规律形成具有相应分布特征的规律谱系（谱阵），一方向是规律谱系（谱阵）可在趋势上凝聚成一个规律，另一方向是规律谱系中的规律亦可进一步细化为更细微的规律谱系（谱阵）；

B 规律谱系（谱阵）中的规律分布通过基本常数的次第解析展开(包括更基本常数的方程)予以连接并延展，在谱系（谱阵）范围内基本常数的数量可数；

C 不同自然现象演化规律谱系（谱阵）之间通过基本常数交互重叠及纽带连接形成动态的规律谱系（谱阵）簇，诸规律谱系（谱阵）簇之间亦通过基本常数相互混叠连接，形成多维动态规律系统。

其中规律谱系（谱阵）之间及规律谱系（谱阵）簇之间延展的交叉重叠是表现形式，基本常数的次第解析展开及其之间的相互交织是纽带内涵。

如此，简学或维学作为一门研究自然现象演化过程规律谱系（谱阵）的学问，即探索规律的规律；研究内容包括规律之间递进演化、规律的展开与规律的凝聚、规律与伴生悖论的转化、规律的分布、规律谱系（谱阵）特征、规律谱系（谱阵）之间及规律谱系（谱阵）簇之间的开放性重叠交叉及纽带关联等。

自然演化规律与自然界的真理具有相当性。将演化规律置换或等效为相对真理或真理，则规律谱系或谱阵直接对应着真理谱系或谱阵，也即对应着真理转化、展开，真理凝聚、重叠，真理的伴生悖论及其构造转化，和真理谱系之间的相互作用与演化；真理非常固，缘境而新异。

在简学或维学的规律谱系（谱阵）解析细节方面，一般方程建立都是有其相应抽象前提基础及理想边界条件的；随着建立方程的前提基础及边界条件的变化，原来建立的方程将逐渐失效，需要新的前提基础及边界条件下建立新的方程形式，进而给出新阶段的演化规律；科学无定论，因境而迁变。

譬如一组趋势性动力学微分方程，当前提基础及边界条件发生变化时，一般不再严格有效；当现象演化从一个相对稳定状态向另一相对稳定状态过渡时，则描述现象演化的微分方程就需要作出相应的形式调整，乃至重新建立趋势性方程组，给出新的规律刻画。虽然诸多自然现象演化过程在相邻层面具有递承的相通性，但各个过程更具有其本俱的演化特征，是故探索由单一方程或方程组统一描述现象演化过程，仅是一种理想。

曾经的山盟海誓一般多是阶段性及大略趋势性的、乃至是暂态的表现，不具有长程动态的内涵属性及细节覆盖特征，环境变迁及攀比附上等因素致使各怀心事貌合神离、倦怠应付揣疑算计。人生只是在幻相中游历，悲欢聚散、成住坏空皆是因果缘的延续代换演进。长久关系太近，多以伤害怨恨收场；过于亲密宽容，多以决绝悲剧谢幕；外延牵扯容易自套枷锁，干涉介入容易自陷泥淖；审慎地，相互宜至少间隔一位圣者的距离，珍惜人生难得的自由尊严。

现象演化过程是多层面的耦合联动，单一的方程或方程组一般仅是局部阶段性的趋势描述。

世界在构造及其演化上，生住异灭是根本规律。

简学或维学主要面向演化规律的规律，规律的系列展开、相互转化与收缩凝聚，同时兼顾战略及战术的整体性探讨方向；一层面的现象演化稳定状态，是另一更高层面演化过程的细化构成台阶，而每一具体的过程，都有其独具的演化特征及相应的规律描述。这其中，演化规律之间的迁移跳转，包括不同尺度、不同条件、不同学科演化规律谱系（谱阵）相互之间存在相互影响。每一阶段演化过程的描述方程组，尽可能在机理上深刻，在趋势上适应，在数学方程上简洁。

自然现象演化具有无穷层面的背景作用，精研细索、追根问底，以期能够穷尽自然演化的根本原则，仅是一种理想愿望；短程经验与长程解析相结合，是描述现象演化过程的有效途径。

如此，在简学或维学意义上，描述自然现象的演化规律，以有效具体简洁开放最为适宜。即使一组简单的微分方程，运用到极致，即直通大道，进而超越数理解析思想，融合分别识。

在大略的以理喻事方面，互为对立相悖的、或互为潜势的、或互补的因素及形态的构造及转化，层层含摄伴存一体。

典型的如中华文化的太极图，其中的阴阳“鱼眼”部分一般显示为互含对立或潜势因素的代表图色。在构造及演化解析方向，每一层的太极图一般都是更高一层太极图的“鱼眼”的隐含构成部分；而在现层太极图的“鱼眼”中，一般又都隐含嵌套着更细微一层的太极图或太极图“形态编码”；如此层层隐含嵌套，伴存一体流转演化（大略如右简图所示）。理论的线性构建近似是向上与向下皆具有无穷尽的隐含嵌套层数，然在跨越广远阶次后，向上与向下的隐含嵌套层数却都各有相应的极限动态趋势值。



在至为简略的层面上，表述形式的转换会直接导致思想的变化；诸如平面几何的 n 角形内角和 $\varphi_n = (n-2)180^\circ$ ，这里自然数 $n \geq 3$ ，其可由三角形分割直接得到。极端近似地，当 $n \rightarrow +\infty$ 时的等角形其极限为圆，内角和 $\varphi_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty^\circ$ 。若突破自然数 $n \geq 3$ 的条件限制，则当 $n=2$ 的二角形时，其等效为一重合的二相等直线段（或一个三角形的高度等于0的形态）， $\varphi_{n=2} = 0^\circ$ ；当 $n=1$ 的一角形时其为直线段二个端点合并近于一个端点， $\varphi_{n=1} = -180^\circ$ ；当 $n=0.5$ 的半角形时端点趋于模糊， $\varphi_{n=0.5} = -270^\circ$ ；当 $n=0$ 的零角形时其近为空白， $\varphi_{n=0} = -360^\circ$ ；当 $n=\pi$ 的 π 角形时， $\varphi_{n=\pi} = (\pi-2)180^\circ$ ；当 $n=1+i$ 的复数角形时， $\varphi_{n=1+i} = (i-1)180^\circ$ ，这里 $i = \sqrt{-1}$ 。

此近为空白背景的处处零角形内角和 $\varphi_{n=0} = -360^\circ$ 及其演化特征与物理学的真空、绝对温度零度等之间的对应关系值得进一步深入研究。

需要指出，上述这段关于零角形的阐述不属于严谨的纯粹数学解析刻画，仅是在多角形演化趋势层面探讨空白背景中的数学内秉特征。

历史传承上，简练的“金木水火土”与“地水火风空”在动态平衡相变转化描述方面各有侧重及优势，其中“金木水火土”在局部环节刻画上较为细致，“地水火风空”在普遍长程解析上更趋近完备；阶段性及并非全部地，前者含道偏于智多外显于术，后者含道偏于慧多外彰于法；以道为基，以法为体，以术为用，道法术互济合一。

科学只是一个台阶，人生只是一个过程，觉行只是一个环节。诸法融一法，一法统诸法；诸音入一音，一音摄诸音；一法无法超生灭，一音无音越清静。

在简学或维学的规律谱系细节特征方面，自然现象及社会架构演化部分过程具有类似性或相通性，即在趋势层面具有相通或相近的方程表述形式；同时在细节机理层面又各自具有独特的性质，即方程参数及系数皆具有相应针对性；这其中通过对基础数据库进行研究，总结出部分参数演化的动态趋势方程或方程组，然后计算导出解析数据库，包括主线缺失数据补充及适当的趋势性预言，进而通过预言数据与基础数据库新数据的比较，对趋势方程与解析数据库予以自循环动态调整；此以基础数据库为本，以趋势性方程为机，以解析数据库为用的三位一体自适应循环更新体系，是数据库理论基础构架探索及应用研究的一种简洁有效模式。

对于科学技术中的解析理论及唯象经验描述框架，如果所列出的方程需覆盖从起始到结束整个演化过程，则一般要建立相应的非线性方程组才能在趋势上近似描述；如果还考虑下一阶段演化的前导孕育过程，则就需要进一步建立跨层面的、乃至是多层面的非线性方程组。这其中线性方程是重要的，具有简洁易解的质朴优势，但线性方程的局限性也是同样显著的；非线性方程具有一定的普适性，但如果将非线性方程描述覆盖始终，则亦是另一层面上的线性思维模式。

局部简单地，一般的单一方程是与更广泛的多层面方程相联系的，甚至是一多层面联立方程组的多变量广义守恒解；而诸常数则贯穿其中，亦都具有相应的、包含着更基础常数的解析方程表述形式，诸层面相互交叉、混叠、嵌套；从定性描述开始，到定量描述，再到新的定性描述，周而复始循环渐近；涵覆整体大略协调，兼容局部关联各异。

一个开放型理论体系，乃至简单的一篇完整诗文等，也如同植物及其果实，根枝叶花组合有序，而果实或有壳有核，或壳核仅具其一，或壳核皆无，与果肉联袂演进各主其效；此壳者，门槛也；核者，隐势也。

对于封闭系统或开放系统，激励、演化及守恒，这三个紧密联系的要素对应着系统参量线性方程或非线性方程的作用项、微分及积分运算，在微元与整体之间的可逆演绎或局部可逆演绎是动力学方程的主旨内涵，是自 Newton 自然哲学以来的数理框架根基，根本上具有机械论或还原论的思想内核；这其中，往往一个简单而又典型的非线性微分方程，却可能没有严格解析解。

建立与微积分方程相并行、同时可相互变换的体系，将是含融并超越目前线性方程及非线性方程，尤其是经典几何与代数结合模式及复变函数阶微积分方程形式、进而实现多层面解析刻画的重要探索方向。描述现象演化过程的数理方程具有相应的逻辑延展性，延展方向及延展程度由哲学思辨融合予以辨析确认。

极致上，数理方程及哲学论述，构成了次第理解世界成住坏空演化机理的步进台阶。在近于究竟层面，科学技术、文学艺术、政论治国等，皆具有理想抽象、实践混叠、动态适应的操作，虽基本面向相异，然框架延伸相通相容，内涵旨趣连绵一体。

在探索自然演化规律或相对真理的过程中，普适构造具有定律的开创发现属性，解析延展具有定理的开疆拓展特征，应用计算具有实践的验证反馈性质；若此三位一体，则即成一领域的祖师级人物；若进而还能直通广宇星辰运行演化、世人生住异灭轮转、诸层世界成住坏空，极致上往来自主、知机导引、自在造化，则终成人类进步明灯、智慧眼目。

此觉悟证道三步渐次为：第一步，构造开放动态的规律谱系（谱阵）或真理谱系（谱阵）；第二步，将规律谱系或真理谱系自动生成化为知识树及知识森林；第三步，透过宿业累积等势的帝王命和状元才将知识树及知识森林自然转化开显为智慧树，一树即森林、森林即一树，离相清净直证大道。

此证道三步简要之三树：构造规律谱系（未树），生形知识树（引树），开显智慧树（化树）。

娑婆与微尘不一不异，透过贪欲和恐惧的幻相，清晰地观照累世以来的因缘业果，于中经行觉悟回向；通世情，不为世情所蔽；达出世路，平等无相智悲互济；践证此途是为自承衣钵。

化 现 因缘业果自作局，变迁映射幻规律；学人躬身执究竟，智者慧光盈太虚。

凝 望 天阔云闲越千载，江山如幕演兴衰；悠然往事浮空际，隐约故人招手来。

自 然 累世复轮转，业境衍流迁；一朝觉非相，所历皆善缘；

智悲无尽际，随遇化示现；无功无生灭，清净自庄严。

1.2.2 一条铁律与一个普遍现象

在现象界，凡事皆可辨析，因缘果相续；过犹不及，适可而止；朴素本真，天成自然。花开未盛、月圆未盈，乃表观佳境；而后随缘转遇，盛极而衰、盈溢而亏。社会单元学识、财富、地位等因素的社会功用亦复如是。当因素处于较低层面变化时，其社会功用的变化微乎其微；而当因素进入中等层面变化时，其社会功用会随之发生显著变化，并反馈激励给因素致使进一步演变；当因素在很高层面变化时，其社会功用的变化或迅速降低、或发生急剧逆转。

人类社会发展到现阶段，集权及专制越来越会成为主流国家结构形式，其有利于国家构架的整体稳定及提高文化传承的弹性，但其在整体效率最大化的同时，权力及建制也易成为国家基础创新发展的阻碍。

阶段性地真正的独立学者越来越少了，官、学、商三样兼顾及通揽的复合型学者成为主流典范及榜样，甚至偏离于学术主线脉络及研究方向，成为政府组织顾问及商业机构代言人仍是诸多学者当然首选；建制化制度使得体制内的诸多职业性学者对应着相应的行政级别，等位官阶及财富额度象征着学者取得的研究成就，赋予了学者相应的社会地位，学者官僚化、工具化是典型特征，自主不自主地完全成为国家机器的半构成半点缀部分，这是社会及学者共同参与作用的结果，学问成为切入公务行政官班的途径，在无奈中成为自己昔日曾十分不屑的人。毕竟，学者及其团队和家人也要在现实社会规则框架下发展及生活，而且同样面临着生住异灭的波折考验；生存需要组织或平台，进入或依附于体制，而组织或平台的核心利益需要进入者放弃部分曾经坚守的理想信念，绝对服从及主要效力于组织或平台的发展方向，操守过于理想纯粹一般都不得久持，人生交易的本质即是在渴求获得中适当平衡妥协，这几乎是死结。

一般地，思想深邃的大家乃至觉悟者，对于普通科学家的细末研究成果或热点附和文章的评价请求，常微笑言之早已离开相关领域前沿许久等等以屏蔽。何以故？称赞有违内心标准，亦会产生误导；提出尖锐问题或深刻建议，易致挫伤打击；缄默拒绝，又不合乎学界互助时宜。

缺少内在独立思想及真实研究成就的应景学者并不被统治集团及社会所尊重，由于不在历史的发展环节构成中所以同样亦被历史所忽略；而真正独立的纯粹学者，又容易被现下功利的学术主流边缘化，逐渐成为自生自灭的异数及游吟者。

关于学者成果的一条铁律是：学者的研究成果主框架有效是前提，同时也要能够为当权者及主流学术权威带来相应好处或潜在利益，方可能受到些许重视及推广。

尤其是当学者取得的显著研究成果不是由当权机关组织部署的攻坚计划任务，亦不是由主流权威学阀战略分配的课题方向且不能与权威学阀的利益联动时，将很易直接导致各方面尴尬局面；若还不被收编招纳，则其境遇就可能更为艰难了。

何以故？学者及其学术研究仅是社会微弱构成部分，在长程上统治阶层需要的是绝对服从及完全效忠，并主动自愿被收割及驱使，这也是统治阶层赋予学者以相应社会地位及资源的主要衡量指标，学者的人品、学问及成就只是参考，而学术界更多时就是一个在国家统治者治国风格影响统化下的江湖组织。

对于上层官员，几乎完全不需要了解学者所建立理论中的具体方程数理意义、算符运算规则及演绎架构普适性，数数类似这样学者的个数，然后建档管理按时发放些许口粮，再分级台阶授予各色花环称誉就可以了。

这其中，诸多学者以为自己清越超俗，其实只是自欺欺人；离开体制遮蔽及建制化岗位支撑，几乎立刻现出原形，隐性寄生者或乞食者而已，甚至在功利面前及生死攸关之际贪心更重、意志更薄弱、骨头更软、形象更猥琐。

若能允许哪怕是一小部分的纯粹学者独立于世，持续地为人们提供相互联系及过渡、但亦迥然不同的动态理性面向和可能构架图景，则对国家文化底蕴传承及未来社会稳健发展都应是莫大的幸事。

在现象描述层面，理论思想普适、原理方程简洁、参量自适应计算，为研究者所往。

社会结构中的资产、权位、偶向，分别类如现象演化中的动能、势能、旋转能，是社会演化的基本要素，于一定条件下相互转化，形成人间世界大部分动态图景。科学探索及技术应用是重要导向，乃至蕴藉简约性的质朴隐喻和纲领性的深刻内涵，是理解及回归自然本底的有效途径；而诸多思量和考证，仅当朝向人生庄严解脱及渐趣自性清净圆融时，才具有根本意义。

何以故？生住异灭是人生主旋律；生死相伴，生死死生；生之远景趋势乃是死亡，而死亡又隐含着下一阶段生之潜势，生死循环相依与共，所有人都在这条路循环往复的路上，因果相续随缘辗转，一般的知识学问构架描述与累世无穷层面关联的死生嵌套机理相比几乎微不足道。

一个普遍的现象是：大多数学者及一般民众几乎没有独立的人格尊严且内心茫然失据而又抵触改变现状。

权力级差或降维威压是国家社会体制结构所具有的显著贯穿性特征的集中表现。

诸如，大学校长若是由上层机构任命的，则校长主要对上级任命机构负责即可，这几乎就从根本上决定了大学办学的走向及风格；偶尔阵发性地，部分大学之间想抱团联盟，上层机构仅一招高校级别分档考核资源区别对待，大学结盟就随即解体消散；大学教授想自组织成立委员会理想治校，上层机构只一招设置教授按比例窄道过关分级爬阶，教授委员会就在顷刻间瓦解。每每到命运攸关之际，学者组织或个体在付出与收获之间首先选择退却自保随风趋炎附势利益最大化是其中的根源。较为极端地，有少部分学者，极尽心力出谋划策总欲坐享其成收割或参与收割别人，往往最终还是成为被收割者；机巧阴隐，私利反噬，未泽苍生，难得善了；何以故？精于术掠于众而德不至道不本也。

一名学者或官员，当其在专业知识及权力岗位之外，若未于生灭灭尽上有所证悟及把握，没有平等悲悯的自在感召力，则无论如何，这样的人生还是近乎虚度了。

简单自给的朴素生活，纯真烂漫的洒脱风格；开宗立派的广远探索，凡圣一如的清静超越。

辞别轻狂与世故，放下我执及法执，超越贪欲和恐惧，安适于无生无灭。劫波的帷幕庄重朴直，等持的国度旷远旖旎；光辉的时刻刹那隐没，明丽的境界尽未来际；随缘的历经知机解因，深切的感怀清静开示。在足够久远的时间周期中，一切都是涨落迁流的；在足够广漠的空间尺度上，一切都是关联互应的；在足够虚空的背景介质里，一切都是自在宛然的。

如此，简学或维学作为一门关于自然现象及社会构架演化规律谱系（谱阵）的学问，即是关于自然现象演化规律分布（如相关诸演化规律分布的分形特征）的学问，如诸层基础原理方程中的常数次第解析连接运算、规律的诸层展开与规律的收缩凝聚、原理或定律与伴生悖论间的转化等，覆盖从机械运动到生死循环；其内涵包括理解、描述及融回自然界的态度、方式及途径，成为连接 Newton 数理思想与 Siddhartha 普适智慧的桥梁或纽带。

通过简学或维学这门学问的研究及实践，以智慧力将由数理方程为主要连接环节的规律谱系簇或真理谱系簇的华丽知识舞台，凝聚转化为探索行进中的朴素台阶，是科学家及哲学家人生旅程次第超越中至为关键的一步。

这里仍宜指出，广泛深入的科学研究注定会在相关领域阶段性地产生学术权威及学术贵族，极端地称王封神；其在稳定学术研究的同时，又极易成为学科进一步发展的阻碍，进而成为与科学探索相悖的存在；这几乎是死结。

科学家及哲学家在娑婆世界皆处于轮回辗转阶段，在随缘尽力、无执无祈、浑然天成的同时，若能够不完全依赖于政府机构及教派组织，至少有几项通常的生存技能以使平素生活基本保底自养，并逐渐拥有相对独立的小世界或小环境体系，则将平视人生旅途中的诸多坎坷与荣誉，亦从而避开成为工具及附属的传统宿命；既不被他人摆布收割，亦不谋划收割别人；寄游天地之间洒脱无羁，进退自主人格完整，依凭本心度世，随缘随遇普济化导。

人生宜尽可能从多角度多层面看待世界，遇事待人平和包容；纯粹理想及偏激偏执，容易使人在下一演化周期自动走向反面，甚至终以自己曾经厌恶的品质及状态辞世。

在这个世界上，人生陷入某一层面的绝境虽为业力牵引、因缘幻相，但亦使人感受路尽无助；此时，来自外部至为淳朴及纯粹天然关心及帮助是十分珍贵的，其几乎就是天地的影子，宽厚温暖、自然淡适，能够深切而又长久地感动人的内心底层，并在适机的境况再延伸传递下去。

在根本上，对于一个理论体系或者一个国家机构，一般并不能完全通过自身证明理论构架的普适正确性及检验出国家机构运转的稳健程度，往往还需要联合外在的诸多形式激励与阻碍等因素予以持续验证及相应长短期层面上动态调整补充完善。

基于目前各主要领域的知识体系积累沉淀程度，及学者个体精力的极限限制和传承能力，在所从事的领域能够作出开创性的贡献越来越难，整体上作出卓越成果的年龄区间也在延迟，依据部分杰出学者的传记资料及不同领域的具体特征差异，在一近时期（前后 300 年左右）此年龄区间（年龄单位：岁）大体趋势约为

$$[A_{GS}, A_{GE}] = [26 + T_{0DS}, 46 + T_{0DE}], \quad T_{0DS} \approx 0 \sim 12, \quad T_{0DE} \approx 0 \sim 12$$

式中 A_{GS} 、 A_{GE} 分别为诸领域学者取得卓越成就的开始年龄与结束年龄， T_{0DS} 、 T_{0DE} 为相应延迟参数。

不同领域延迟参数取值有所差别，趋势上从理论探索到工程实践，从经济研究到社会变革实施，诸领域 $A_{GE} - A_{GS}$ 值不断增加，祖师级开创性成果年龄重叠区间约为 [32, 48]。特别地当 $T_{0DE} \approx T_{0DS}$ 时，平均窗口期 $A_{GE} - A_{GS} \approx 20$ 年，即在此情况大约有 20 年超卓璀璨。

一名科学家或学者，在前人基础上取得若干阶段性进展成为学术权威后，如果认为已是真理在握，或者是自己所从事的学科地位较之其它学科更高级，则这名科学家或学者已经走向了科学的对立面，逐渐成为科学发展及学科互助的阻碍，僵化迷失了自己，不见山外山及天外天，不见现下科学框架以外的浩瀚世界，甚至在极端偏激情况下会在片刻间转化为学术枯尸。

一名学者或一个学术团体，无论在所从事的学术领域取得多么辉煌的成就，但如果没有在生住异灭或成住坏空方面有适当的深刻证悟及自如把握，没有对众生在平等尊严方面有所贡献，则在近于实质层面仍然是虚掷了岁月。

一般地，当一名学者将自己苦心孤诣探索多年的研究成果主动献予其他学者时，无论出于何种初衷，则在其他学者那里都容易造成炫耀显摆及抢占先机之意，即使是确实具有帮助和启示的作用；而如果是其他学者在不经意间得到，甚至是在付出代价后才获取的，则往往就会比较敬重珍惜。同样地，一个人在因缘际遇中作了对他人有根本助益的事情，如果是自己宣扬出去，善行自陈、居荣外示，无论是在何种情况下，则都有邀功索惠之嫌；而如果是他人偶尔从背后途径才知晓事情的因果真相，则其由衷感激之情将会更为刻骨铭心。

学者在适当的时候宜走出封闭的书斋及实验室，到大自然开放的真正书斋及实验室中徒步游历，在增长见闻的同时切身体验民间疾苦，朴直尽心同体慈悲，知机善施随遇智慧。不捍卫公正亦不恪守平等则无以慈悲，以为一蹴而就及祈望一事成而天下定则不具智慧。

探索内证而又不执著迷失其中是近至道；科学家、哲学家、宗教家，在逐步渐趣体悟内证的纯粹方向上浑然一体。从平素日常生活的点点滴滴中廓然窥见大道虚影，随即无差别地融入其中成就道体，觉悟悲悯平等无相，继而无道识念亦无道行执，自然趋向圆融无碍自在庄严。一衍一切，一切旨一；次第相映，不一不异；含光慧剑，泯然无际。

方程 (1.1) 式在一般情况下的自嵌套特征与其趋势性近似解 (1.19) 式（包括广义偏对称方程 (1.27) 式~ (1.30) 式、(1.32) 式及 (1.33) 式等趋势性表述形式）仅是简学或维学纲要框架的基本参考点，而不限于此。

简学或维学纲要框架，简洁朴直、灵活有效，自适应融合新发现的系列规律，是其根本。动态开放、知机适度、率真担荷、实践亲证，乃人生旅途要义。

曾 经 人生过半常忆念，多少青涩植心田；犹记那年莲池畔，清风明月夜阑珊。

怀 故 娑婆共业幻大千，硝烟疫劫连荒年；社稷初平接中兴，世家歌楼入云端；
凡尘无常期高洁，朝代更替祈圣贤；向来江山累血骨，终是百姓难复难。

纯 真 人生即淬炼，随遇勇向前；知机开种智，递续历无限；
妙法超善恶，至道离戏言；浮沉共是非，淡然回眸间。

时 光 雨后斜阳似初曙，霓陨潭波光花浮；孤鸿低唤白云住，闲舟随泊芳草处。

1.2.3 自然最优原则或自然简洁原则

自然最优原则或自然简洁原则：自然界现象总是处在动态平衡的变化中，所有变化都有相应的演化过程；现象演化状态之间转变方程在一般情况下遵循自然最优或最简洁路径光滑曲线方程组形式，于趋势层面包括阶跃瞬变与极缓慢转变在内演化过程的方程组化简后基本可近似表示为方程 ((1.1) 式)

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi_{IE} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = \psi_{EE}$$

的形式予以描述；而于内蕴或基底上其近似等效解析解（构造方程 (1.19) 式）

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]}$$

及其拓展的广义偏对称方程 (1.27) 式~方程 (1.30) 式、方程 (1.32) 式及方程 (1.33) 式等表述即为此状态转变方程的具体形式，乃至为状态间最优、或最简洁路径光滑曲线方程、或等效方程形式；而自然最优原则或自然简洁原则的特征方程即为斜率方程（方程 (1.13) 式形式）

$$\eta_S \approx k_S, \quad \eta_E \approx k_E, \quad \eta_{SE0} \rightarrow k_{SE0}。$$

在此最优或最简洁路径光滑曲线方程原则的意义下，方程 (1.19) 式即为其具有较广泛适应性的表述形式，而方程 (1.1) 式则实为一相应微分方程组的条件极限解或趋势性近似解表述。在较为广义的近似等效情况下，一个平衡性或激励平衡性的动力学演化微分方程，一般对应着一个泛函变分表述形式。

依据趋势性连接方程(1.19)式在对自然饱和过程描述时,部分地有下图1-2的18种曲线形态,其中包含着方程(1.25)式的2种对称双曲正切函数曲线形态,及方程(1.24)式中的6种对称曲线形态;依据方程(1.19)式描述的近于极限状态的饱和过程与蠕变过程趋势性曲线如图1-3所示;表明在趋势上,饱和或极限过程、蠕变过程及流动过程皆是同一类方程的不同体现形式,其中还包括诸如材料切削走刀抗力(或后刀面磨损宽度)一时间(或切削路程)曲线、石墨烯/单晶硅太阳能电池I—V特性曲线、疲劳裂纹扩展速率曲线等,也即在趋势层面可由方程(1.19)式统一描述相关的自然饱和过程、材料蠕变过程及流体流动过程,饱和极限、材料断裂、电磁击穿、流体湍流等特征具有相通的演化机理,在解析描述方面可相互借鉴参照,其趋势性的起承转合特征可由相近的数学方程统一刻画。

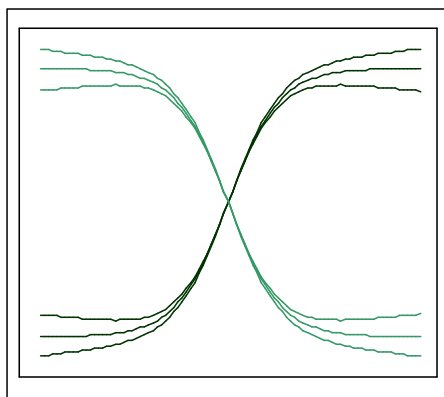


图 1-2 自然饱和过程趋势性方程曲线图
Fig. 1-2 Curves figure of tendency equations of natural saturation process

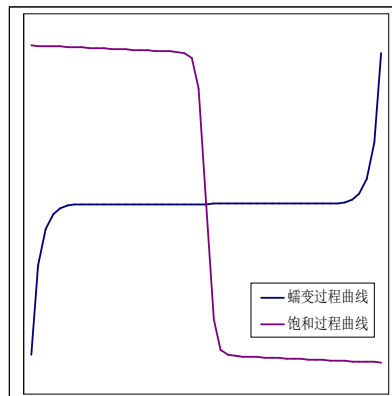


图 1-3 近于极限状态的饱和过程和蠕变过程趋势性方程曲线图(卐、卍)
Fig. 1-3 Curve figure of tendency equation of saturation process and creep process near the limit state(卐 and 卍)

在对诸如金属或岩石材料蠕变过程描述时则有曲线形态如图1-4所示。

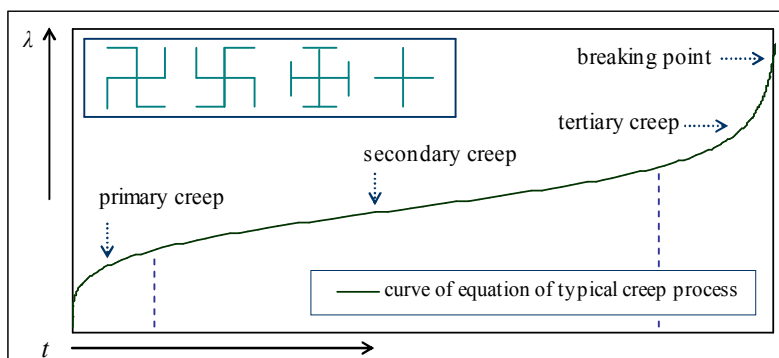


图 1-4 金属或岩石材料典型蠕变过程趋势性方程曲线图
Fig. 1-4 Curve figure of tendency equation of typical creep process for metal or rock material

上述饱和过程与蠕变过程的图1-2及图1-4来自参考资料1。

特别地上述诸过程还会包含一系列较小的阶段性阶跃过程或类如宏观量子化效应;例如当材料中分布若干晶体颗粒时,则其蠕变过程将由多个较小的阶跃过程串联及并联混叠构成。

由上述饱和或极限过程“卐、卍”与蠕变及流动过程“卐、卍”之间互为潜势的统一描述思想,在前人的状态符号“卐、卍”之后,于现象演化的曲线模式方向,加局部坐标系(亦含环境条件之义)可构造一简素的中文象形字符“卐”(或“卍”),中文读音拟为“ān”,英文拟为“adaproses”,即自适应演化过程、知机随顺导引之义,亦含无穷遍历演替、内因外缘和合轮转之义,以表述饱和过程或极限过程与蠕变过程及流动等过程之间互为潜势的统一演化模式。

方程(1.1)式及其等效解析解(1.19)式(包括广义偏对称方程(1.27)式~(1.30)式、方程(1.32)式及(1.33)式等表述形式)在趋势层面的普适性,是因其直接作为描述诸多现象演化过程偏微分方程组在消元简化后的一般性非线性微分方程形式决定的,是构造与解析递成基阶、几何与代数互为表里的体现。

1.2.4 等效单一平衡点的连接方程形式

对于方程 (1.18) 式, 一般地, 其还可以表示为多平衡点的形式

$$y = y_{0SE} + \frac{\exp[\beta_{E1}(x - x_{0E1})] - \exp[-\beta_{S1}(x - x_{0S1})]}{\exp[\beta_{E2}(x - x_{0E2})] + \exp[-\beta_{S2}(x - x_{0S2})]}; \quad (1.53)$$

这里 β_{S1} 、 β_{S2} 、 β_{E1} 、 β_{E2} 为待定系数, y_{0SE} 、 x_{0S1} 、 x_{0S2} 、 x_{0E1} 、 x_{0E2} 为多平衡点位置常数。

由方程 (1.53) 式得

$$\begin{aligned} y &= y_{0SE} + \frac{\exp[\beta_{E1}(x - x_{0E1})] - \exp[-\beta_{S1}(x - x_{0S1})]}{\exp[\beta_{E2}(x - x_{0E2})] + \exp[-\beta_{S2}(x - x_{0S2})]} \\ &= y_{0SE} + \frac{\exp[\beta_{E1}[(x - x_0) + (x_0 - x_{0E1})]] - \exp[-\beta_{S1}[(x - x_0) + (x_0 - x_{0S1})]]}{\exp[\beta_{E2}[(x - x_0) + (x_0 - x_{0E2})]] + \exp[-\beta_{S2}[(x - x_0) + (x_0 - x_{0S2})]]} \\ &= y_{0SE} + \frac{\exp[\beta_{E1}(x_0 - x_{0E1})]\exp[\beta_{E1}(x - x_0)] - \exp[-\beta_{S1}(x_0 - x_{0S1})]\exp[-\beta_{S1}(x - x_0)]}{\exp[\beta_{E2}(x_0 - x_{0E2})]\exp[\beta_{E2}(x - x_0)] + \exp[-\beta_{S2}(x_0 - x_{0S2})]\exp[-\beta_{S2}(x - x_0)]} \\ &= y_0 - \frac{A_{E1} - A_{S1}}{A_{E2} + A_{S2}} + \frac{A_{E1} \exp[\beta_{E1}(x - x_0)] - A_{S1} \exp[-\beta_{S1}(x - x_0)]}{A_{E2} \exp[\beta_{E2}(x - x_0)] + A_{S2} \exp[-\beta_{S2}(x - x_0)]}; \end{aligned} \quad (1.54)$$

式中诸待定系数的关系为

$$y_0 - \frac{A_{E1} - A_{S1}}{A_{E2} + A_{S2}} = y_{0SE},$$

$$A_{E1} = \exp[\beta_{E1}(x_0 - x_{0E1})], \quad A_{E2} = \exp[\beta_{E2}(x_0 - x_{0E2})];$$

$$A_{S1} = \exp[-\beta_{S1}(x_0 - x_{0S1})], \quad A_{S2} = \exp[-\beta_{S2}(x_0 - x_{0S2})].$$

方程 (1.54) 式即表明方程 (1.19) 式为多平衡点 x_{0S1} 、 x_{0S2} 、 x_{0E1} 、 x_{0E2} 等效为单一平衡点 x_0 的表述形式。

依据方程 (1.54) 式, 多平衡点等效为单一平衡点 $y(x = x_0) = y_0$ 的扩展形式可表示为

$$y = y_0 - \frac{A_{N0} - \sum_{i=1}^j A_{Ni}}{A_{M0} + \sum_{i=1}^j A_{Mi}} + \frac{A_{N0} \exp[\beta_{N0}(x - x_0)] - \sum_{i=1}^j A_{Ni} \exp[-\beta_{Ni}(x - x_0)]}{A_{M0} \exp[\beta_{M0}(x - x_0)] + \sum_{i=1}^j A_{Mi} \exp[-\beta_{Mi}(x - x_0)]}, \quad (1.55)$$

这里 A_{N0} 、 A_{Ni} 、 β_{N0} 、 β_{Ni} 、 A_{M0} 、 A_{Mi} 、 β_{M0} 、 β_{Mi} 为待定系数; i 、 j 为自然数, $j \geq i \geq 1$ 。

1.2.5 非线性微分方程的近似等效解析解方法

通过曲线形态及诸待定常量迭代计算比较, 方程 (1.24)、(1.25) 二式待定常量可直接计算, 但曲线形态为对称性质, 不具有形态的多样性; 方程 (1.17) 式曲线形态多样, 但待定系数迭代计算较为复杂; 方程 (1.19) 式曲线形态较多, 待定常量迭代计算较为简练, 同时具有方程 (1.17) 式的基本特性, 故在能够对大多数曲线间断区域进行趋势性有效连接或对数据曲线进行趋势性拟合的原则下, 取方程 (1.19) 式作为数据曲线间断区域的一般性连接方程。

深入研究表明, 方程 (1.19) 式能够描述从阶跃到缓变、开始及结束状态从平缓到陡峭的多种曲线形态, 其中包括诸多饱和过程、蠕变过程、及蠕变与饱和二者混合过程、乃至器件的电学击穿过程与材料的力学断裂过程和流体的湍流相变过程等一般性趋势描述, 对诸如轨道交通路径 (含轨道跨越连接及光滑变轨过渡曲线)、模型光滑曲面等领域的自适应连接计算, 都具有很好的迭代收敛性。

对于较为广泛的曲线间断区域, 诸如位错间断、回转间断等, 不能直接应用自适应连接方程 (1.19) 式进行连接, 需要将间断区域的一个端点数据段、乃至二个端点数据段进行平移或旋转, 生成新的端点前后次序排列的间断区域, 然后以连接方程 (1.19) 式为基础, 采用映射方程 (或参量方程) 方法进行趋势性连接分析^[1]。

上述二维空间的连接方程方法, 为多维空间数据组间断区域的光滑自适应连接 (包括光滑曲线连接及光滑曲面连接等) 提供了运算基础, 其中部分结论可直接拓展应用。

方程 (1.1) 式包含有诸多条件解析解形式, 其中包括指数函数、三角函数、双曲正切函数等, 及诸函数复合形式、隐函数形式等; 而且尤其适于具有分式函数解或近似等效分式函数解形式。

方程(1.1)式一条件解析解(1.6)式中双曲正切函数仅表明其拓展型方程(1.19)式为非线性动力学方程(1.1)式的一个近似等效解析解或其拓展解析解形式。

与方程(1.37)式的一阶微分方程(1.20)式及二阶微分方程(1.21)式比较,方程(1.1)式较为简洁,具有较强的针对性及广泛的适应性,建立方程(1.1)式与方程(1.19)式的联系对于深入了解现象演化过程的普适机理具有框架层面的指导意义。

方程(1.19)式有 x_0 、 A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 共计5个待定常量;方程(1.1)式在 $\varpi_2 \neq 0$ 时亦可取有 $\varpi_1\varpi_2^{-1}$ 、 $\xi_1\varpi_2^{-1}$ 、 $\xi_2\varpi_2^{-1}$ 、 $\xi_3\varpi_2^{-1}$ 、 $[\psi_{EE} - \xi_{IE}]\varpi_2^{-1}$ 共计5个常量;将方程(1.19)式代入到方程(1.1)式中,在方程(1.1)式中导数部分及多项式部分都会出现包含 $[\cosh[\alpha_3(x-x_0)]]^{-3}$ 、 $[\cosh[\alpha_3(x-x_0)]]^{-2}$ 、 $[\cosh[\alpha_3(x-x_0)]]^{-1}$ 的函数项,以及常数项;附加方程(1.19)式与方程(1.1)式于 $x=x_0$ 处平衡点附近临域的关系方程

$$0.5A\varpi_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \xi_1 y_0 + \xi_2 y_0^2 + \xi_3 y_0^3 = \psi_{EE} - \xi_{IE}; \quad (1.56)$$

初步确定方程(1.19)式诸待定系数与方程(1.1)式诸常量间的关系方程组,进而近似地给出方程(1.19)式中诸待定系数取值的单值、多值或区间形式。

对于方程(1.19)式,其还可由相应的一偏微分方程组解得,也由一偏微分方程组化简出非线性方程(1.1)式或类似方程表述,然后再求出近似等效解析解(1.19)式或其它近似等效解析解形式。

更进一步直接地,以连接曲线能够于趋势上近似等于数据曲线间断区域在始点邻域及终点邻域的二个斜率,同时连接曲线在平衡点处斜率的直线与间断区域从始点至终点的直线相交所夹锐角最小,或以光滑连接曲线路径最优这几个条件作为约束,通过变分方法获得方程(1.19)式(包括由其拓展的广义偏对称方程(1.27)式~(1.30)式、方程(1.32)式及(1.33)式等表述形式)的最优具体表述形式,是能够自适应连接数据曲线间断区域的最优或最简洁路径光滑曲线方程表述,可直接应用于诸如饱和过程与蠕变过程的趋势性分析计算、扩散过程模型的近似或等效解析解表述及人工神经网络模型中的一般性或广义激活函数(general Activation function)构造等方面。

1.2.6 非线性动力学方程的若干条件解析解

对于方程(1.1)式

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi_{IE} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = \psi_{EE},$$

在参量 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 、 $\psi_{EE} - \xi_{IE}$ 为常量,且 $dy/dx=0$ 时,其常数解即为下面三次代数方程的根

$$\xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = \psi_{EE} - \xi_{IE}.$$

当外激励与内激励相平衡,即 $\psi_{EE} = \xi_{IE}$ 时,方程(1.1)式进一步简化为

$$\varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \varpi_1 \frac{dy}{dx} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = 0; \quad (1.57)$$

其常数解为代数方程 $\xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = 0$ 的根,由此即可得方程(1.57)式的三个常数解为

$$y=0, \quad y=y_{0E1}, \quad y=y_{0E2};$$

式中 $y_{0E1} = -0.5\xi_3^{-1}[\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3}]$, $y_{0E2} = -0.5\xi_3^{-1}[\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3}]$, $\xi_3 \neq 0$ 。

在 ϖ_1 、 ϖ_2 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 皆为常量情况下,方程(1.57)式的一变换形式为

$$\frac{1}{2}\varpi_2 \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \varpi_1 \frac{dy}{dx} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = 0. \quad (1.58)$$

当 $\varpi_1=0$ 时,对方程(1.58)式积分得

$$\frac{1}{2}\varpi_2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2}\xi_1 y^2 + \frac{1}{3}\xi_2 y^3 + \frac{1}{4}\xi_3 y^4 = C_{E01}, \quad (1.59)$$

式中 C_{E01} 为积分常量。

特别地当 $\xi_1 = 0$ 、 $\xi_2 = 0$ 、 $C_{E01} = 0$ 时, 方程 (1.59) 式的解析解为

$$y = \frac{\varpi_2}{\mp \sqrt{-0.5\varpi_2\xi_3x + \varpi_2C_{E02}}}, \quad (1.60)$$

式中 C_{E02} 为积分常量。

简单地, 方程 (1.57) 式当 $\varpi_2 = 0$ 、 $\varpi_1 \neq 0$ 时, 其成为

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = 0. \quad (1.61)$$

方程 (1.61) 式在 $\xi_1 = 0$ 、 $\xi_2 \neq 0$ 情况下, 可拆分为

$$-\frac{\varpi_1\xi_3}{y}dy + \frac{\varpi_1\xi_2}{y^2}dy + \frac{\varpi_1\xi_3^2}{\xi_2 + \xi_3y}dy + \xi_2^2 dx = 0;$$

得方程解为

$$-\varpi_1\xi_3 \ln y + \varpi_1\xi_3 \ln[\xi_2 + \xi_3y] - \varpi_1\xi_2y^{-1} + \xi_2^2x = C_{E03}; \quad (1.62)$$

方程 (1.61) 式在 $\xi_1 \neq 0$ 、 $\xi_2 = 0$ 情况下, 可拆分为

$$\varpi_1y^{-3} \frac{dy}{dx} + \xi_1y^{-2} + \xi_3 = 0;$$

其亦有解为

$$y^2 = \frac{\xi_1}{\exp[\varpi_1^{-1}(2\xi_1x - C_{E04})] - \xi_3}; \quad (1.63)$$

式中 C_{E03} 、 C_{E04} 皆为积分常量。

在 $\xi_1 \neq 0$ 情况下, 方程 (1.61) 式的一通用拆分形式为

$$\frac{2\varpi_1}{y}dy - \frac{[\xi_2 + 2\xi_3y]\varpi_1}{\xi_1 + \xi_2y + \xi_3y^2}dy - \frac{4\xi_2\xi_3\varpi_1}{-[\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3] + [\xi_2 + 2\xi_3y]^2}dy + 2\xi_1 dx = 0. \quad (1.64)$$

方程 (1.61) 式当 $\xi_2^2 > 4\xi_1\xi_3$ 时, 其另一拆分形式为

$$\frac{\varpi_1}{y}dy + \frac{\varpi_1\xi_1}{y_{0E1}\sqrt{\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3}} \frac{1}{y - y_{0E1}}dy - \frac{\varpi_1\xi_1}{y_{0E2}\sqrt{\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3}} \frac{1}{y - y_{0E2}}dy + \xi_1 dx = 0.$$

方程 (1.61) 式由上述二个拆分形式得当 $\xi_2^2 > 4\xi_1\xi_3$ 时二个相应的解分别为

$$2\varpi_1 \ln y - \varpi_1 \ln[\xi_1 + \xi_2y + \xi_3y^2] + \frac{2\varpi_1\xi_2}{\sqrt{\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3}} \operatorname{arctanh} \frac{\xi_2 + 2\xi_3y}{\sqrt{\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3}} + 2\xi_1x = C_{E05}, \quad (1.65)$$

$$\varpi_1 \ln y + \frac{\varpi_1\xi_1}{y_{0E1}\sqrt{\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3}} \ln[y - y_{0E1}] - \frac{\varpi_1\xi_1}{y_{0E2}\sqrt{\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3}} \ln[y - y_{0E2}] + \xi_1x = C_{E06}; \quad (1.66)$$

式中 C_{E05} 、 C_{E06} 皆为积分常量。

方程 (1.61) 式当 $\xi_2^2 < 4\xi_1\xi_3$ 时, 由通用拆分形式 (1.64) 式可得其解为

$$2\varpi_1 \ln y - \varpi_1 \ln[\xi_1 + \xi_2y + \xi_3y^2] - \frac{2\varpi_1\xi_2}{\sqrt{4\xi_1\xi_3 - \xi_2^2}} \operatorname{arctan} \frac{\xi_2 + 2\xi_3y}{\sqrt{4\xi_1\xi_3 - \xi_2^2}} + 2\xi_1x = C_{E07}, \quad (1.67)$$

式中 C_{E07} 为积分常量。

此时解 (1.67) 式当 $\xi_2 = 0$ 时即转化为简单的解 (1.63) 式形式。

方程 (1.61) 式当 $\xi_2^2 = 4\xi_1\xi_3$ 时, 通用拆分形式 (1.64) 式简化为

$$\frac{\varpi_1}{y}dy - \frac{\varpi_1}{y + 0.5\xi_2\xi_3^{-1}}dy - \frac{2\xi_2\xi_3\varpi_1}{[2\xi_3y + \xi_2]^2}dy + \xi_1 dx = 0,$$

可得其解为

$$\varpi_1 \ln y - \varpi_1 \ln[y + 2\xi_1 \xi_2^{-1}] + \frac{2\xi_1 \varpi_1}{\xi_2 y + 2\xi_1} + \xi_1 x = C_{E08}, \quad (1.68)$$

式中 C_{E08} 为积分常量。

当方程 (1.1) 式中诸系数函数 ϖ_1 、 ϖ_2 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 及外内激励函数差 $\psi_{EE} - \xi_{IE}$ 不为常量时，直接采用拆分法一般不能进行求解，而需经由 Lie 群 (Lie group) 变换等方法予以分析讨论。

上述解中的 (1.62)、(1.65)、(1.66) 三式，属于隐式解形式，具有连接方程 (1.19) 式的部分性质，也即微分方程 (1.1) 式包含着连接方程 (1.19) 式的部分解析特征。

1.2.7 一类简单非线性微分方程的积分解析解及基本解析解的表示分析

动力学微分方程 (及其积分解形式) 的优越性是十分显著的，其兼顾了现象演化过程中特征量于细节瞬态趋势变化和整体长程守恒状态二个层面的阶段性区域信息。

在较为广泛的情况下，即便是很简单的非线性微分方程，其解析解的求解也未必很容易。一个简单的一阶非线性微分方程形式为

$$A_0 \frac{dy}{dx} - A_1 \frac{x^{\tau_1}}{y^{\tau_2}} = A_2 x^{\tau_0}, \quad (1.69)$$

这里 A_0 、 A_1 、 A_2 、 τ_0 、 τ_1 、 τ_2 皆为与现象演化的阶段性过程相关的常数。

对于方程 (1.69) 式，当 $A_0 = 0$ 时有代数方程 $A_1 y^{-\tau_2} + A_2 x^{\tau_0 - \tau_1} = 0$ ；而当 $A_0 \neq 0$ 时，若 $A_1 A_2 = 0$ ，则方程有简明的积分解析解。

当 $\tau_1 = \tau_0$ 、 $\tau_2 = n$ (这里 n 为自然数) 或部分 $\tau_2 = 0.5n$ 时，方程 (1.69) 式亦有简明的积分解析解。

当 $\tau_1 \neq -1$ 时，方程 (1.69) 式可转化为

$$A_0(\tau_1 + 1) \frac{dy}{dx^{\tau_1 + 1}} - A_1 y^{-\tau_2} = A_2 x^{\tau_0 - \tau_1};$$

取参量 $z = x^{\tau_1 + 1}$ ，及常量 $C_{0N} = A_0(\tau_1 + 1)$ 、 $h_1 = -\tau_2$ 、 $h_2 = (\tau_0 - \tau_1)(\tau_1 + 1)^{-1}$ ，有方程形式

$$C_{0N} \frac{dy}{dz} - A_1 y^{h_1} = A_2 z^{h_2}. \quad (1.70)$$

当 $\tau_1 = 2\tau_0 + 1$ 、 $\tau_2 = 1$ 、 $\tau_0 = -1$ 时，亦有 $\tau_1 = \tau_0$ ，方程 (1.69) 式有简明的积分解析解。

当 $A_0 A_1 A_2 \neq 0$ 、 $\tau_1 = 2\tau_0 + 1$ 、 $\tau_2 = 1$ 时，方程 (1.69) 式成为简单形式

$$A_0 \frac{dy}{dx} - A_1 \frac{x^{2\tau_0 + 1}}{y} = A_2 x^{\tau_0}. \quad (1.71)$$

下面先讨论方程 (1.71) 式的一般积分解析解表示。

对于微分方程 (1.71) 式，设其预置积分为

$$y = wx^{\rho_0}, \quad (1.72)$$

这里 ρ_0 为预置常数， $w = w(x)$ 为待定函数。

将 (1.72) 式代入 (1.71) 式得

$$A_0 [x^{\rho_0} \frac{dw}{dx} + \rho_0 x^{\rho_0 - 1} w] - A_1 \frac{x^{2\tau_0 - \rho_0 + 1}}{w} = A_2 x^{\tau_0}; \quad (1.73)$$

取预置常数 $\rho_0 = \tau_0 + 1$ ，整理得

$$A_0 x \frac{dw}{dx} + A_0(\tau_0 + 1)w - A_1 \frac{1}{w} = A_2;$$

即有

$$\frac{A_0 w}{-A_0(\tau_0 + 1)w^2 + A_2 w + A_1} dw = \frac{1}{x} dx; \quad (1.74)$$

同时预置积分解 (1.72) 式成为

$$y = wx^{\tau_0 + 1}. \quad (1.75)$$

对于 (1.74) 式, 可得

$$\frac{A_0 w}{-\frac{1}{4A_0(\tau_0+1)}[[2A_0(\tau_0+1)w-A_2]^2-[A_2^2+4A_0A_1(\tau_0+1)]]}dw = \frac{1}{x}dx. \quad (1.76)$$

当 $A_2^2+4A_0A_1(\tau_0+1)>0$ 时, (1.76) 式成为

$$\frac{A_0 w}{-\frac{1}{4A_0(\tau_0+1)}[[2A_0(\tau_0+1)w-A_2]^2-[\sqrt{A_2^2+4A_0A_1(\tau_0+1)}]^2]}dw = \frac{1}{x}dx;$$

取常量 σ_1 、 σ_2 分别为

$$\sigma_1 = \frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0+1)}}{2A_0(\tau_0+1)}, \quad \sigma_2 = \frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0+1)}}{2A_0(\tau_0+1)};$$

得

$$\frac{A_0 w}{-A_0(\tau_0+1)[w-\sigma_1][w-\sigma_2]}dw = \frac{1}{x}dx;$$

拆分有

$$\left[\frac{1}{w-\sigma_2} + \frac{\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2}\left[\frac{1}{w-\sigma_1} - \frac{1}{w-\sigma_2}\right]\right]dw = -(\tau_0+1)\frac{1}{x}dx;$$

积分上式, 即得 (1.74) 式当 $A_2^2+4A_0A_1(\tau_0+1)>0$ 时的解为

$$[w-\sigma_1]^{\sigma_1}[w-\sigma_2]^{-\sigma_2} = C_{0ath}x^{(\tau_0+1)(\sigma_2-\sigma_1)}; \quad (1.77)$$

这里 C_{0ath} 为积分常量。

当 $A_2^2+4A_0A_1(\tau_0+1)=0$ 时, (1.76) 式成为

$$\frac{A_0 w}{-A_0(\tau_0+1)[w+2A_1A_2^{-1}]^2}dw = \frac{1}{x}dx;$$

积分上式, 即得 (1.74) 式当 $A_2^2+4A_0A_1(\tau_0+1)=0$ 时的解为

$$[w+2A_1A_2^{-1}]\ln[[C_{0exp}x^{\tau_0+1}][w+2A_1A_2^{-1}]]+2A_1A_2^{-1}=0; \quad (1.78)$$

这里 C_{0exp} 为积分常量。

而当 $A_2^2+4A_0A_1(\tau_0+1)<0$ 时, (1.76) 式成为

$$\frac{A_0 w}{-\frac{1}{4A_0(\tau_0+1)}[[2A_0(\tau_0+1)w-A_2]^2+[\sqrt{-A_2^2-4A_0A_1(\tau_0+1)}]^2]}dw = \frac{1}{x}dx;$$

有

$$\frac{1}{-A_0(\tau_0+1)w^2+A_2w+A_1}d(-A_0(\tau_0+1)w^2+A_2w+A_1) - \frac{A_2}{-\frac{1}{4A_0(\tau_0+1)}[[2A_0(\tau_0+1)w-A_2]^2+[\sqrt{-A_2^2-4A_0A_1(\tau_0+1)}]^2]}dw = -2(\tau_0+1)\frac{1}{x}dx;$$

积分上式, 即得 (1.74) 式当 $A_2^2+4A_0A_1(\tau_0+1)<0$ 时的解为

$$\begin{aligned} & \sqrt{-A_2^2-4A_0A_1(\tau_0+1)}\ln[[C_{0atan}x^{2(\tau_0+1)}][-A_0(\tau_0+1)w^2+A_2w+A_1]] \\ & = 2A_2\arctan\frac{-2A_0(\tau_0+1)w+A_2}{\sqrt{-A_2^2-4A_0A_1(\tau_0+1)}}; \end{aligned} \quad (1.79)$$

这里 C_{0atan} 为积分常量。

由预置解 (1.75) 式与 (1.77) 式、(1.78) 式、(1.79) 式, 得当 $A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1) > 0$ 时, 微分方程 (1.71) 式的积分解析解为

$$[y - \sigma_1 x^{\tau_0+1}]^{\sigma_1} [y - \sigma_2 x^{\tau_0+1}]^{-\sigma_2} = C_{0\text{ath}}; \quad (1.80)$$

当 $A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1) = 0$ 时, 微分方程 (1.71) 式的积分解析解为

$$[y + 2A_1A_2^{-1}x^{\tau_0+1}] \ln[C_{0\text{exp}}[y + 2A_1A_2^{-1}x^{\tau_0+1}]] + 2A_1A_2^{-1}x^{\tau_0+1} = 0; \quad (1.81)$$

当 $A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1) < 0$ 时, 微分方程 (1.71) 式的积分解析解为

$$\begin{aligned} & \sqrt{-A_2^2 - 4A_0A_1(\tau_0 + 1)} \ln[C_{0\text{atan}}[-A_0(\tau_0 + 1)y^2 + A_2yx^{\tau_0+1} + A_1x^{2(\tau_0+1)}]] \\ & = 2A_2 \arctan \frac{-2A_0(\tau_0 + 1)y + A_2x^{\tau_0+1}}{\sqrt{-A_2^2 - 4A_0A_1(\tau_0 + 1)}x^{\tau_0+1}}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

对于当 $A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1) > 0$ 时的积分解析解 (1.79) 式, 其还可以表示为

$$[y - \sigma_1 x^{\tau_0+1}]^{d_2} [y - \sigma_2 x^{\tau_0+1}]^{-d_2} [[y - \sigma_1 x^{\tau_0+1}][y - \sigma_2 x^{\tau_0+1}]]^{-\sqrt{A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1)}} = C_{0\text{ath}}^{2A_0(\tau_0+1)};$$

即有

$$\begin{aligned} & [[A_0(\tau_0 + 1)]^{-1} [A_0(\tau_0 + 1)y^2 - A_2yx^{\tau_0+1} - A_1x^{2(\tau_0+1)}]]^{\sqrt{1+4A_0A_1A_2^{-2}(\tau_0+1)}} \\ & = C_{0\text{ath}}^{-2A_0A_2^{-1}(\tau_0+1)} \frac{2A_0(\tau_0 + 1)y - [A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1)}]x^{\tau_0+1}}{2A_0(\tau_0 + 1)y - [A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1)}]x^{\tau_0+1}}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

下面简略讨论微分方程 (1.71) 式当 $A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1) > 0$ 时的一种基本解析解或初步解析解表示方法, 其以试探性为主、辅之以解析分析性, 途径之一是直接以特解的待定常数法切入, 为积分解析解 (1.80) 式的简化表示, 或为 (1.82) 式的余解形式, 是一种参考性、试探性的方法, 并不具有一般性普适解析意义。

对于方程 (1.71) 式, 当 $A_0A_1A_2(\tau_0 + 1) \neq 0$ 时, 其有一条件等效形式

$$B_0 \frac{dy}{dx} - \frac{B_1 x^{\tau_0+1}}{y} = 1, \quad (1.84)$$

式中 $B_0 = (\tau_0 + 1)A_0A_1A_2^{-2}$, $B_1 = A_1A_2^{-1}$; 因 $A_0A_1A_2(\tau_0 + 1) \neq 0$, 故 $B_0 \neq 0$ 、 $B_1 \neq 0$ 。

对于方程 (1.84) 式, 有一直观解 (特解)

$$\eta_0 y = B_1 x^{\tau_0+1}, \quad (1.85)$$

这里 η_0 为待定常数。

将 (1.85) 式代入 (1.84) 式中得 $\eta_0^2 + \eta_0 - B_0 = 0$, 解得常数 $\eta_0 = -0.5 \pm 0.5\sqrt{1+4B_0}$; 即得 (1.84) 式的直观解形式

$$[0.5(\sqrt{1+4B_0} + 1)y + B_1 x^{\tau_0+1}][0.5(\sqrt{1+4B_0} - 1)y - B_1 x^{\tau_0+1}] = 0; \quad (1.86)$$

或

$$B_0 y^2 - B_1 x^{\tau_0+1} y - B_1^2 x^{2(\tau_0+1)} = 0. \quad (1.87)$$

由特解 (1.87) 式, 设方程 (1.84) 式的积分解析解可表示为

$$[B_0 y^2 - B_1 x^{\tau_0+1} y - B_1^2 x^{2(\tau_0+1)}]^{\lambda_0} f(x, y) = C_{00}, \quad (1.88)$$

式中 λ_0 为待定常数, $f(x, y)$ 为待定函数, C_{00} 为积分常量。

显然直观解 (1.87) 式是积分解析解 (1.88) 式当 $C_{00} = 0$ 时的表示。

进一步地, 由 (1.86)、(1.88) 二式, 设方程 (1.84) 式的积分解析解中主要与其直观解 $[0.5(\sqrt{1+4B_0} + 1)y + B_1 x^{\tau_0+1}]$ 及 $[0.5(\sqrt{1+4B_0} - 1)y - B_1 x^{\tau_0+1}]$ 诸分项密切相关的形式为基本解析解或初步解析解, 则此基本解析解即可表示为

$$[0.5(\sqrt{1+4B_0} + 1)y + B_1 x^{\tau_0+1}]^{k_1} [0.5(\sqrt{1+4B_0} - 1)y - B_1 x^{\tau_0+1}]^{k_2} = C_{00}, \quad (1.89)$$

式中 k_1 、 k_2 为待定常数。

对于 (1.89) 式, 取 $\sqrt{1+4B_0} = k_0 + 1$, 这里 k_0 为常量; 因 $B_0 \neq 0$, 故 $k_0 \neq 0$; 得

$$B_0 = 0.25k_0^2 + 0.5k_0; \quad (1.90)$$

解 (1.89) 式成为

$$[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}]^{k_1} [0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{k_2} = C_{00}. \quad (1.91)$$

对解 (1.91) 式求导得

$$\begin{aligned} & k_1[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}]^{k_1-1} [0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{k_2} [(0.5k_0 + 1)\frac{dy}{dB_1x^{\tau_0+1}} + 1] \\ & + k_2[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}]^{k_1} [0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{k_2-1} [0.5k_0\frac{dy}{dB_1x^{\tau_0+1}} - 1] = 0; \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} & [(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}]^{k_1-1} [0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{k_2-1} \\ & \times [k_1[0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}][(0.5k_0 + 1)\frac{dy}{dB_1x^{\tau_0+1}} + 1] \\ & + k_2[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}][0.5k_0\frac{dy}{dB_1x^{\tau_0+1}} - 1]] = 0; \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} & [(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}]^{k_1-1} [0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{k_2-1} = 0; \\ & k_1[0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}][(0.5k_0 + 1)\frac{dy}{dB_1x^{\tau_0+1}} + 1] \\ & + k_2[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}][0.5k_0\frac{dy}{dB_1x^{\tau_0+1}} - 1] = 0. \quad (1.92) \end{aligned}$$

由 (1.84) 式、(1.92) 式得

$$\begin{aligned} & k_1[0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}][\frac{0.5k_0 + 1}{B_0}(\frac{B_1x^{\tau_0+1}}{y} + 1) + 1] \\ & + k_2[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}][\frac{0.5k_0}{B_0}(\frac{B_1x^{\tau_0+1}}{y} + 1) - 1] = 0; \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} & [-(0.5k_0 + 1)k_1 + 0.5k_0k_2]\frac{B_1^2x^{2\tau_0+2}}{y} \\ & + [(0.25k_0^2 - B_0 - 1)k_1 + (0.25k_0^2 + k_0 - B_0)k_2]B_1x^{\tau_0+1} \\ & + [(0.5k_0(0.5k_0 + B_0 + 1)k_1 + (0.5k_0 + 1)(0.5k_0 - B_0)k_2]y = 0; \quad (1.93) \end{aligned}$$

将方程 (1.90) 式 $B_0 = 0.25k_0^2 + 0.5k_0$ 代入方程 (1.93) 式中, 化简得

$$\begin{aligned} & [-(0.5k_0 + 1)k_1 + 0.5k_0k_2]\frac{B_1^2x^{2\tau_0+2}}{y} - [(0.5k_0 + 1)k_1 - 0.5k_0k_2]B_1x^{\tau_0+1} \\ & + [0.5k_0(0.5k_0 + 1)^2k_1 - 0.25(0.5k_0 + 1)k_0^2k_2]y = 0; \quad (1.94) \end{aligned}$$

故相应地有三个方程

$$\begin{aligned} & -(0.5k_0 + 1)k_1 + 0.5k_0k_2 = 0, \\ & (0.5k_0 + 1)k_1 - 0.5k_0k_2 = 0, \\ & 0.5k_0(0.5k_0 + 1)^2k_1 - 0.25(0.5k_0 + 1)k_0^2k_2 = 0; \end{aligned}$$

由此三个方程得常数比例方程

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{0.5k_0 + 1}{0.5k_0} = 1 + 2k_0^{-1}, \text{ 或 } \frac{k_2}{k_1} = \frac{0.5k_0 + 1}{0.5k_0} = \frac{\mu_0(0.5k_0 + 1)}{0.5\mu_0k_0}; \quad (1.95)$$

这里 μ_0 为不等于 0 的任意常数。

方程 (1.95) 式表明, 常数比例 $k_1^{-1}k_2 = 1 + 2k_0^{-1}$ 取值唯一, 而常数 k_1 与 k_2 有无穷多组取值 $k_1 = 0.5\mu_0k_0$, $k_2 = \mu_0(0.5k_0 + 1)$; 故得方程 (1.71) 式在 $A_0A_1A_2(\tau_0 + 1) \neq 0$ 时解 (1.89) 式的具体表示为

$$[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}]^{0.5\mu_0k_0}[0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{\mu_0(0.5k_0+1)} = C_{00}; \quad (1.96)$$

即得基本解析解形式

$$[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}]^{0.5k_0}[0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{0.5k_0+1} = C_{00}^{\mu_0^{-1}} = C_{00B}; \quad (1.97)$$

或表示为

$$[(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}][0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{1+2k_0^{-1}} = C_{00B}^{2k_0^{-1}} = C_{00S}; \quad (1.98)$$

式中 $k_0 = \sqrt{1 + 4B_0} - 1$, $B_0 = (\tau_0 + 1)A_0A_1A_2^{-2}$, $B_1 = A_1A_2^{-1}$, 积分常量 $C_{00B} = C_{00}^{\mu_0^{-1}}$, $C_{00S} = C_{00B}^{2k_0^{-1}}$ 。

由解 (1.97) 式得

$$[[0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}][0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{0.5k_0}[0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}] = C_{00B},$$

相应地得解 (1.88) 式的基本解析解形式的表示为

$$[B_0y^2 - B_1x^{\tau_0+1}y - B_1^2x^{2(\tau_0+1)}]^{0.5k_0}[0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}] = C_{00B}; \quad (1.99)$$

或表示为

$$[B_0y^2 - B_1x^{\tau_0+1}y - B_1^2x^{2(\tau_0+1)}][0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{2k_0^{-1}} = C_{00S}。$$

由解 (1.99) 式的表述形式相应地得解 (1.88) 式在基本解析解或初步解析解形式中待定常数 λ_0 及待定函数 $f(x, y)$ 的一组表示式分别为

$$\lambda_0 = 0.5k_0, \quad f(x, y) = C_{00}^{1-\mu_0^{-1}}[0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]。$$

特别地, 当 $\mu_0 = 2$ 时, 常数 k_1 与 k_2 的一组值为 $k_1 = k_0$ 、 $k_2 = k_0 + 2$; 相应地, 解 (1.96) 式或 (1.97) 式、及 (1.98) 式的等效表述分别为

$$[(k_0 + 2)y + 2B_1x^{\tau_0+1}]^{k_0}[k_0y - 2B_1x^{\tau_0+1}]^{k_0+2} = C_{E00}; \quad (1.100)$$

$$[(k_0 + 2)y + 2B_1x^{\tau_0+1}][k_0y - 2B_1x^{\tau_0+1}]^{1+2k_0^{-1}} = C_{E00S}; \quad (1.101)$$

这里 C_{E00} 、 C_{E00S} 为积分常量; $C_{E00} = 4^{k_0+1}C_{00} = 4^{k_0+1}C_{00B}^2$, $C_{E00S} = C_{E00}^{k_0^{-1}}$ 。

依据基本解析解 (1.97) 式亦得

$$[[0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}][0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}]^{k_0+1} = C_{00B}^2 \frac{(0.5k_0 + 1)y + B_1x^{\tau_0+1}}{0.5k_0y - B_1x^{\tau_0+1}};$$

则有

$$\begin{aligned} & [[A_1A_2^{-2}][A_0(\tau_0 + 1)y^2 - A_2yx^{\tau_0+1} - A_1x^{2(\tau_0+1)}]]^{\sqrt{1+4A_0A_1A_2^{-2}(\tau_0+1)}} \\ & = C_{00B}^2[1 + 2k_0^{-1}] \frac{2A_0(\tau_0 + 1)y - [A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1)}]x^{\tau_0+1}}{2A_0(\tau_0 + 1)y - [A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1)}]x^{\tau_0+1}}。 \end{aligned} \quad (1.102)$$

由 (1.83) 式及 (1.102) 式得

$$C_{00B}^2 C_{00B}^{2A_0A_2^{-1}(\tau_0+1)} = \frac{2[A_0A_1A_2^{-2}(\tau_0 + 1)]^{\sqrt{1+4A_0A_1A_2^{-2}(\tau_0+1)}+1}}{2A_0A_1A_2^{-2}(\tau_0 + 1) + \sqrt{1+4A_0A_1A_2^{-2}(\tau_0 + 1)} + 1}; \quad (1.103)$$

(1.103) 式表明由基本解析解 (1.97) 式得到的 (1.102) 式与由积分解析解 (1.80) 式得到的 (1.83) 式具有相同的形式, 即基本解析解 (1.97) 式为微分方程 (1.71) 式当 $A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1) > 0$ 时积分解析解 (1.80) 式的简化或等效表述形式, 亦是当 $A_2^2 + 4A_0A_1(\tau_0 + 1) < 0$ 时积分解析解 (1.82) 式的余解 (对偶实解的虚解形式) 表示。

基本解析解 (1.97) 式保持了在数学结构形式上的对称性; 部分方程依据 (1.97) 式得到的基本解析解与依据 Lie 群变换等方法得到的积分解析解在形式上略有差异, 整体上由积分因子及 Lie 群变换等方法得到的积分解析解更为严谨普适。

简单地, 诸如方程 (1.71) 式当 $A_0 A_1 A_2 (\tau_0 + 1) \neq 0$ 时的下面五个具体方程形式

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x^3}{y} = x \quad (\tau_0 = 1, A_0 = A_1 = A_2 = 1);$$

$$\frac{dy}{dx} - 3\frac{x^{11}}{y} = 6x^5 \quad (\tau_0 = 5, A_0 = 1, A_1 = 3, A_2 = 6);$$

$$2\frac{dy}{dx} - 5\frac{x^4}{y} = 4x^{1.5} \quad (\tau_0 = 1.5, A_0 = 2, A_1 = 5, A_2 = 4);$$

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{x^{-5}}{y} = 4x^{-3} \quad (\tau_0 = -3, A_0 = 1, A_1 = -2, A_2 = 4);$$

$$3\frac{dy}{dx} + 4\frac{x^{-0.5}}{y} = 2x^{-0.75} \quad (\tau_0 = -0.75, A_0 = 3, A_1 = -4, A_2 = 2);$$

依据 (1.97) 式即得其基本解析解或初步解析解、或余解形式分别为

$$(2y + x^2)(y - x^2)^2 = C_1;$$

$$[0.5(\sqrt{3} + 1)y + 0.5x^6]^{0.5(\sqrt{3}-1)} [0.5(\sqrt{3} - 1)y - 0.5x^6]^{0.5(\sqrt{3}+1)} = C_2;$$

$$[0.5(\sqrt{7.25} + 1)y + 1.25x^{2.5}]^{0.5(\sqrt{7.25}-1)} [0.5(\sqrt{7.25} - 1)y - 1.25x^{2.5}]^{0.5(\sqrt{7.25}+1)} = C_3;$$

$$[0.5(\sqrt{2} + 1)y - 0.5x^{-2}]^{0.5(\sqrt{2}-1)} [0.5(\sqrt{2} - 1)y + 0.5x^{-2}]^{0.5(\sqrt{2}+1)} = C_4; \quad (1.104)$$

$$[0.5(\sqrt{2i} + 1)y - 2x^{0.25}]^{0.5(\sqrt{2i}-1)} [0.5(\sqrt{2i} - 1)y + 2x^{0.25}]^{0.5(\sqrt{2i}+1)} = C_5; \quad (1.105)$$

这里 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 为积分常量, $i = \sqrt{-1}$; 基本解析解 (1.105) 式即为微分方程当 $A_2^2 + 4A_0 A_1 (\tau_0 + 1) < 0$ 时积分解析解 (1.82) 式的余解形式。

依据 (1.100) 式或 (1.101) 式, 其中解 (1.104) 式、(1.105) 式的等效表述分别为

$$[(\sqrt{2} + 1)y - x^{-2}]^{\sqrt{2}-1} [(\sqrt{2} - 1)y + x^{-2}]^{\sqrt{2}+1} = C_{E4}, \quad (1.106)$$

$$\text{或 } [(\sqrt{2} + 1)y - x^{-2}] [(\sqrt{2} - 1)y + x^{-2}]^{3+2\sqrt{2}} = C_{E4}^{\sqrt{2}+1}; \quad (1.107)$$

$$[(\sqrt{2i} + 1)y - 4x^{0.25}]^{\sqrt{2i}-1} [(\sqrt{2i} - 1)y + 4x^{0.25}]^{\sqrt{2i}+1} = C_{E5}, \quad (1.108)$$

$$\text{或 } [(\sqrt{2i} + 1)y - 4x^{0.25}] [(\sqrt{2i} - 1)y + 4x^{0.25}]^{(1-2\sqrt{2i})/3} = C_{E5}^{-(1+\sqrt{2i})/3}; \quad (1.109)$$

这里 C_{E4}, C_{E5} 为积分常量。

上述简略分析结论仅是在特殊条件下方程 (1.69) 式的一般积分解析解、基本解析解或初步解析解表示探讨, 而如方程 (1.69) 式的下面诸简单具体形式

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = x \quad (\tau_0 = 1, \tau_1 = 0, \tau_2 = 1, A_0 = A_1 = A_2 = 1);$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y^2} = 1 \quad (\tau_0 = 0, \tau_1 = 1, \tau_2 = 2, A_0 = A_1 = A_2 = 1);$$

$$\frac{dy}{dx} - y^3 = x \quad (\tau_0 = 1, \tau_1 = 0, \tau_2 = -3, A_0 = A_1 = A_2 = 1)$$

等微分方程, 甚至都不易通过变换给出其解表示; 但或可探讨其参量解或近似参量解形式。

由此初步可见, 在未来构造一并行于 Newton 微积分动力学思想框架的描述体系以互为犄角连环并进是很必要的。

一般地, 位于构造层面并同时兼顾解析及计算层面的数学家, 更多地是面向建立较为普适而又相对具体的现象演化过程方程组, 然后进行适当理想简化处理, 给出其解析解; 将该解析解根据讨论方向进行形式拓展, 再代回原来未简化的方程组中进行试探性确定近似解的初步形式; 经过若干次的形式拓展修改、试探性回代, 最终确定方程组近似解在探讨方向的具体形式, 乃至构造出更高层次的数学框架; 这是构造层面数学家工作的内涵精要所在。

微分方程描述现象演化过程具有很大的优势, 对于简单现象演化可以给出一系列条件解; 但对于复杂现象的演化过程, 微分方程形式往往难以求解; 若能直接构建近似性或趋势性的表达式, 即微分方程与趋势性解相互参照建立协同推进完善, 则亦是很有前途的探索方向。

1.2.8 趋势性连接方程的一般性讨论

将连接方程 (1.17) 式的形式表示为

$$y = s_0 + \frac{A_{01} \exp[\alpha_1(x - x_0)] - A_{02} \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{A_{03} \exp[\alpha_3(x - x_0)] + A_{04} \exp[-\alpha_4(x - x_0)]}, \quad (1.110)$$

方程中 s_0 、 x_0 、 A_{01} 、 A_{02} 、 A_{03} 、 A_{04} 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 为待定常量。

当在 A_{01} 、 A_{02} 、 A_{03} 、 A_{04} 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 诸待定常量中有等于 0 的情况时, 方程 (1.110) 式可适当简化为相应的特例形式; 当其皆不为 0 时, 设

$$\psi_{\text{nu}} = A_{01} \exp[\alpha_1(x - x_0)] - A_{02} \exp[-\alpha_2(x - x_0)], \quad (1.111)$$

$$\psi_{\text{de}} = A_{03} \exp[\alpha_3(x - x_0)] + A_{04} \exp[-\alpha_4(x - x_0)]; \quad (1.112)$$

则有

$$\psi_{\text{nu}} = A_{01} \exp(-\theta_1) \exp[\alpha_1(x - x_0 + \alpha_1^{-1} \theta_1)] - A_{02} \exp(-\theta_2) \exp[-\alpha_2(x - x_0 - \alpha_2^{-1} \theta_2)], \quad (1.113)$$

式中 θ_1 、 θ_2 为待定系数。

当 $A_{01}A_{02} > 0$ 时, 取 (1.113) 式中 $A_{01} \exp(-\theta_1) = A_{02} \exp(-\theta_2)$, $\alpha_1^{-1} \theta_1 = -\alpha_2^{-1} \theta_2$; 得系数

$$\theta_1 = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[A_{01}A_{02}^{-1}], \quad \theta_2 = \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[A_{02}A_{01}^{-1}].$$

方程 (1.113) 式成为

$$\psi_{\text{nu}} = A_{\text{nu}} [\exp[\alpha_1(x - x_{\text{nu}})] - \exp[-\alpha_2(x - x_{\text{nu}})]], \quad (1.114)$$

式中 $A_{\text{nu}} = A_{01}[A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}}$, $x_{\text{nu}} = x_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[A_{01}A_{02}^{-1}]$ 。

同样对于方程 (1.112) 式, 当 $A_{03}A_{04} > 0$ 时, 可得

$$\psi_{\text{de}} = A_{\text{de}} [\exp[\alpha_3(x - x_{\text{de}})] + \exp[-\alpha_4(x - x_{\text{de}})]], \quad (1.115)$$

式中 $A_{\text{de}} = A_{03}[A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)^{-1}}$, $x_{\text{de}} = x_0 - (\alpha_3 + \alpha_4)^{-1} \ln[A_{03}A_{04}^{-1}]$ 。

由方程 (1.112)、(1.115) 二式得当 $A_{01}A_{02} > 0$ 、 $A_{03}A_{04} > 0$ 时, 方程 (1.110) 式成为

$$\begin{aligned} y &= s_0 + \frac{A_{\text{nu}} [\exp[\alpha_1(x - x_{\text{nu}})] - \exp[-\alpha_2(x - x_{\text{nu}})]]}{A_{\text{de}} [\exp[\alpha_3(x - x_{\text{de}})] + \exp[-\alpha_4(x - x_{\text{de}})]]} \\ &= s_0 + A \exp[\gamma(x - x_{\text{exp}})] \frac{\sinh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x - x_{\text{nu}})]}{\cosh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_{\text{de}})]}, \end{aligned} \quad (1.116)$$

式中 $A = \frac{A_{\text{nu}}}{A_{\text{de}}} = \frac{A_{01}[A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}}}{A_{03}[A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)^{-1}}}$, $x_{\text{exp}} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)x_{\text{nu}} - (\alpha_3 - \alpha_4)x_{\text{de}}}{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4}$;

$$\gamma = 0.5[\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4].$$

同理可得当 $A_{01}A_{02} < 0$ 、 $A_{03}A_{04} < 0$ 时, 方程 (1.110) 式成为

$$\begin{aligned} y &= s_0 + \frac{A_{01} \exp[\alpha_1(x - x_0)] + (-A_{02}) \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{A_{03} \exp[\alpha_3(x - x_0)] - (-A_{04}) \exp[-\alpha_4(x - x_0)]} \\ &= s_0 + A \exp[\gamma(x - x_{\text{exp}})] \frac{\cosh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x - x_{\text{nu}})]}{\sinh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_{\text{de}})]}, \end{aligned} \quad (1.117)$$

式中 $x_{\text{nu}} = x_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[-A_{01}A_{02}^{-1}]$, $x_{\text{de}} = x_0 - (\alpha_3 + \alpha_4)^{-1} \ln[-A_{03}A_{04}^{-1}]$;

$$A = \frac{A_{01}[-A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}}}{A_{03}[-A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)^{-1}}}.$$

当 $A_{01}A_{02} > 0$ 、 $A_{03}A_{04} < 0$ 时, 方程 (1.110) 式成为

$$\begin{aligned} y &= s_0 + \frac{A_{01} \exp[\alpha_1(x - x_0)] - A_{02} \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{A_{03} \exp[\alpha_3(x - x_0)] - (-A_{04}) \exp[-\alpha_4(x - x_0)]} \\ &= s_0 + A \exp[\gamma(x - x_{\text{exp}})] \frac{\sinh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x - x_{\text{nu}})]}{\sinh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_{\text{de}})]}, \end{aligned} \quad (1.118)$$

式中 $x_{\text{nu}} = x_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[A_{01}A_{02}^{-1}]$, $x_{\text{de}} = x_0 - (\alpha_3 + \alpha_4)^{-1} \ln[-A_{03}A_{04}^{-1}]$;

$$A = \frac{A_{01}[A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}}}{A_{03}[-A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)^{-1}}}.$$

当 $A_{01}A_{02} < 0$ 、 $A_{03}A_{04} > 0$ 时, 方程 (1.110) 式成为

$$\begin{aligned} y &= s_0 + \frac{A_{01} \exp[\alpha_1(x-x_0)] + (-A_{02}) \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{A_{03} \exp[\alpha_3(x-x_0)] + A_{04} \exp[-\alpha_4(x-x_0)]} \\ &= s_0 + \frac{A_{nu} [\exp[\alpha_1(x-x_{nu})] + \exp[-\alpha_2(x-x_{nu})]]}{A_{de} [\exp[\alpha_3(x-x_{de})] + \exp[-\alpha_4(x-x_{de})]]} \\ &= s_0 + A \exp[\gamma(x-x_{exp})] \frac{\cosh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_{nu})]}{\cosh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x-x_{de})]}, \end{aligned} \quad (1.119)$$

式中 $x_{nu} = x_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[-A_{01}A_{02}^{-1}]$, $x_{de} = x_0 - (\alpha_3 + \alpha_4)^{-1} \ln[A_{03}A_{04}^{-1}]$;

$$A = \frac{A_{01}[-A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}}}{A_{03}[A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)^{-1}}}。$$

方程 (1.117) ~ (1.119) 三式中 γ 、 x_{exp} 二个系数仍同于方程 (1.116) 式中的表达式。

方程 (1.117) ~ (1.119) 式可作为较 (1.19) 式更普适的连接方程形式予以深入研究应用时参考。

上述讨论不是严格的解析推导演绎过程, 仅是对连接方程形式及部分性质的简略注释。对于更为广泛的数据曲线形态的趋势性理想连接拟合, 方程 (1.19) 式可进一步拓展为

$$y = \varsigma_1(x) \left[A_1 + A \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]} \right] \varsigma_2(x), \quad (1.120)$$

这里 $\varsigma_1(x) = 1 - A_0 \exp(\mathcal{G}_1 x)$ 、 $\varsigma_2(x) = \exp(\mathcal{G}_2 x)$ 分别为远离平衡点的前、后区域连接拟合曲线形态调整函数, $A_1 = y_0[\varsigma_1(x_0)\varsigma_2(x_0)]^{-1}$, $|A_0| < 1$ 、 $\mathcal{G}_1 \leq 0$ 、 $\mathcal{G}_2$ 为曲线形态调整系数。

极端情况下, $\varsigma_1(x_0) \approx 1$ 、 $\varsigma_2(x_0) \approx 1$, $A_1 \approx y_0$, 即上述方程的运算是给方程 (1.19) 式加了一个在平衡点附近区域幅值近为 1 的广义窗函数 $w_G(x)$ 形式

$$w_G(x) = \varsigma_1(x)\varsigma_2(x)。$$

特别地, 上述拓展方程还可简化为形式

$$y = [1 - A_0 \exp(\mathcal{G}_1 x)][A_1 + A \tanh[\alpha(x-x_0)]] \exp(\mathcal{G}_2 x)。 \quad (1.121)$$

若分别考虑远离平衡点的前或后区域拟合曲线形态, 则亦分别有更为简化的方程形式

$$y = [1 - A_0 \exp(\mathcal{G}_1 x)][A_1 + A \tanh[\alpha(x-x_0)]] , \quad \mathcal{G}_2 = 0 \quad (1.122)$$

$$y = [A_1 + A \tanh[\alpha(x-x_0)]] \exp(\mathcal{G}_2 x) , \quad A_0 = 0。 \quad (1.123)$$

上述拓展方程 (1.120) 式及其三个简化形式 (1.121) 式 ~ (1.123) 式能对从阶跃到缓变的广泛数据曲线进行趋势连接拟合。

在描述方面, 物理方程形式偏于现象演化过程的机理刻画, 带有构造时的物理意义痕迹; 而数学方程形式则趋向于适当合并简化, 使其具有在分析求解时的表述一般性; 更为重要的是, 此由物理方程所进行的数学方程一般性整合表述, 尤其是溯源性的微分方程一般形式, 经过较为广泛的现象演化过程检验后, 甚至能够极大地拓展物理学框架基础理论, 在更深刻的层面丰富物理学研究思想; 与此同时, 由物理构造所衍生出的数学方程及相关分析方法, 也易成为数学领域新的分支发展方向, 如此物理构造与数学方程二者互济互助协同跃进。

1.2.9 微分方程等效解析解的普适构造方法及其意义

上述讨论内容, 主要是以逻辑解析为内核的普适构造方法, 分析微分方程解的构造方向。

描述现象演化过程可以根据对演化过程的内因及外缘等诸因素构造出一系列微分方程, 进而形成具体的动力学微分方程组; 该微分方程组在消元简化并略去二边的高次项后, 可普适构造表示为诸如方程 (1.1) 式的简洁非线性动力学方程形式; 方程 (1.1) 式具有诸多条件解, 其中之一即是直接构造表示为等效解析解 (1.19) 式的形式, 其在趋势上可统一描述饱和过程及蠕变过程; 方程 (1.19) 式具有偏对称的特征, 对于更广泛的饱和过程及蠕变过程, 可进一步将方程 (1.19) 式拓展构造为诸如广义的偏对称方程 (1.27) 式 ~ (1.30) 式、(1.32) 式及 (1.33) 式等形式予以刻画; 偏对称方程中诸系数与原微分方程中诸系数的关系, 可以通过在相同极限情况下的若干条件解形式对比予以近似确定。

动力学微分方程, 是经典逻辑解析途径; 而以逻辑解析为内核的普适构造方法, 可以在趋势上覆盖动力学方程的主线脉络内涵, 具有对演化过程多阶段跨越及简单综合显式解的特征, 乃至进一步引出新的数学方程形式, 揭示新的物理学效应, 开辟新的层面及方向。

1.2.10 自然现象演化系列相变特征函数的扩展型双曲正切级数表示形式及自然演化平衡法则

双曲正切函数形式，尤其是双曲正切的幂级数形式，一直被广泛地应用在相关微分方程的非线性解法运算中。

一般地，对于自然现象演化过程，都具有多阶段平衡的系列相变特征；在趋势层面上，依据方程 (1.19) 式，此系列相变特征所表现的单调连续函数 $y = f(x)$ 可以近似地表示为扩展型双曲正切级数形式

$$f(x) = f(x_{01}) - A_1 + \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} A_{S\Lambda} \left[1 + \frac{\exp[\alpha_{1S\Lambda}(x - x_{0\Lambda})] - \exp[-\alpha_{2S\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]}{2 \cosh[\alpha_{3S\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]} \right] + \lambda_s, \quad (1.124)$$

这里 $f(x_{01})$ 为初始段平衡点纵坐标； Θ 、 Λ 为自然数， $\Theta \geq 1$ 、 $\Theta \geq \Lambda \geq 1$ ； $x_{0\Lambda}$ 为 $y = f(x)$ 曲线各分段中心平衡点横坐标，一般地，各分段开始点、结束点即在其前极限点、后极限点附近； $A_{S\Lambda}$ 、 $\alpha_{1S\Lambda}$ 、 $\alpha_{2S\Lambda}$ 、 $\alpha_{3S\Lambda}$ 为各分段曲线形态系数； λ_s 为级数整体偏移量。

方程 (1.124) 式即为现象演化的系列相变趋势方程，属于原则层面的级数表示形式；当 $\alpha_{2S\Lambda} \neq \alpha_{3S\Lambda}$ 、 $\Lambda \geq 3$ 时，级数中后项将对前项产生叠加，诸系数运算迭代量显著增加。

特别地，当函数曲线诸段连接区域可近似等效为水平线时，可取在起始段 $\alpha_{3S\Lambda} = \alpha_{1S\Lambda}$ 、在结束段 $\alpha_{3S\Theta} = \alpha_{2S\Theta}$ ，则方程 (1.124) 式可简略表示为便捷运算的形式

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_{01}) + A_{S1} \frac{\exp[\alpha_{1S1}(x - x_{01})] - \exp[-\alpha_{2S1}(x - x_{01})]}{2 \cosh[\alpha_{1S1}(x - x_{01})]} \\ + \sum_{\Lambda=2}^{\Theta-1} A_{S\Lambda} [1 + \tanh[\alpha_{S\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]] \\ + A_{S\Theta} + A_{S\Theta} \frac{\exp[\alpha_{1S\Theta}(x - x_{0\Theta})] - \exp[-\alpha_{2S\Theta}(x - x_{0\Theta})]}{2 \cosh[\alpha_{2S\Theta}(x - x_{0\Theta})]} + \lambda_s, \quad (1.125) \end{aligned}$$

这里 $\Theta \geq 3$ 、 $\Theta - 1 \geq \Lambda \geq 2$ ， $\alpha_{S\Lambda}$ 为中间诸分段曲线形态系数；取诸分段中心平衡点前、后极限点坐标分别为 $(x_{be\Xi}, f(x_{be\Xi}))$ 、 $(x_{af\Xi}, f(x_{af\Xi}))$ ， Ξ 为自然数， $\Theta \geq \Xi \geq 1$ ；有待定常数近似计算方程 $x_{0\Xi} \approx 0.5[x_{be\Xi} + x_{af\Xi}]$ ， $\gamma_{S\Xi} \approx 0.5[f(x_{af\Xi}) - f(x_{be\Xi})]$ ；一般地，各分段开始点、结束点即分别在其前极限点、后极限点附近；特别地，当在起始段 $\alpha_{1S1} \approx \alpha_{2S1}$ 、在结束段 $\alpha_{1S\Theta} \approx \alpha_{2S\Theta}$ 时，一般有级数调整偏移量 $\lambda_s \approx 0$ 。

在方程 (1.125) 式中，方程最前项部分描述连续函数 $y = f(x)$ 曲线的起始段，方程最后项描述函数 $y = f(x)$ 曲线的结束段，中间的级数部分描述函数 $y = f(x)$ 曲线起始段与结束段之间的诸分段，在接点区域近似等效为水平线，还可应用广义偏对称方程 (1.32) 式、(1.33) 式予以较精准的刻画，同时保证起始段及结束段曲线形态在外延方向的开放适应性。

将自然演化过程分解为一系列阶段性的相互连接的单一饱和过程及蠕变过程，然后依据级数方程 (1.124) 式或 (1.125) 式进行整合描述，这也是上述二个级数方程的要旨所在。

方程 (1.124) 式或 (1.125) 式阐释了现象演化的一个基本法则——自然演化平衡法则。

自然演化平衡法则：诸多现象演化过程都存在阶段性极限，极限之间状态转化传递，逐次与演化环境相应层面动态平衡乃至形成系列相变，如此多阶段的、次第延续的起承转合演化平衡过程基本由方程 (1.124) 式或方程 (1.125) 式近似描述；演化过程性、动态平衡性、相变系列性、辗转因果性、隐显含转性、层次无限性、多重反馈性、延展开放性，是自然现象的内秉特征。

自然演化平衡法则的意义为，对于一些自然现象，大略趋势上前一阶段性饱和过程或蠕变过程在进入后期的同时，亦开始酝酿下一阶段的饱和过程或蠕变过程，且饱和过程与蠕变过程可交替呈现，曲线诸段级数项间向前延伸及向后延伸相互影响，由此周期性台阶构成更高层面的非线性演化过程，其包含着多层面、多阶段、系列相变、动态开放的激励、演化、守恒要旨。

一般地，局部的、阶段性的单个饱和过程在达到相对缓慢变化的饱和区域附近将生成延展出新的饱和过程，包括演化模式的更新；持续多阶段、多模式的饱和过程次第连接，构成更高层面演化过程的局部环节或细化台阶，蠕变等过程亦复如是，其诸层面具有近似的分形特征。

上述自然演化平衡法则，在物理学领域对诸如量子理论中状态瞬变阶跃过程与深层背景激励参量的极缓变过程的细节刻画具有趋势性的引导意义，为广泛的序列阶跃过程瞬变机理、包含更基本常数方程的常数解析展开、诸层面相应常数之间的叠加关系（常数级数）及系列相变描述提供参考。在数学领域，Taylor 级数及 Fourier 级数具有主项大区域定调、次项逐级细节修正逼近的特征；而方程（1.124）式或（1.125）式表述的级数，则具有诸项逐阶渐近的特征，前一项为后一项提供延展台阶；其不同于 Taylor 级数的幂函数叠加形式，而类似于 Fourier 级数的序列函数叠加形式，比较适用于对开放系统部分参量演化的趋势性分析等方面。

方程（1.125）式的分析处理要点为，以历史数据规律为主基调，重点分析现前阶段的数据变化趋势，然后做出适当的开放性预测。

对于方程（1.125）式，取在分段中心平衡点附近的临域为坐标点为 $(x_{0\Xi} - \Delta x_{0\Xi}, f(x_{0\Xi} - \Delta x_{0\Xi}))$ 、 $(x_{0\Xi} + \Delta x_{0\Xi}, f(x_{0\Xi} + \Delta x_{0\Xi}))$ ，这里 $x_{af\Xi} - x_{0\Xi} \gg \Delta x_{0\Xi} > 0$ ；则有起始段、中间诸段、结束段在中心平衡点附近的斜率方程分别为

$$\frac{f(x_{01} + \Delta x_{01}) - f(x_{01} - \Delta x_{01})}{2\Delta x_{01}} = \frac{1}{2} A_{S1} [\alpha_{1S1} + \alpha_{2S1}], \quad (1.126)$$

$$\frac{f(x_{0\Lambda} + \Delta x_{0\Lambda}) - f(x_{0\Lambda} - \Delta x_{0\Lambda})}{2\Delta x_{0\Lambda}} = A_{S\Lambda} \alpha_{S\Lambda}, \quad (1.127)$$

$$\frac{f(x_{0\Theta} + \Delta x_{0\Theta}) - f(x_{0\Theta} - \Delta x_{0\Theta})}{2\Delta x_{0\Theta}} = \frac{1}{2} A_{S\Theta} [\alpha_{1S\Theta} + \alpha_{2S\Theta}]; \quad (1.128)$$

及在起始段 $x \ll x_{01}$ 区域斜率 k_{SS1} 、结束段 $x \gg x_{0\Theta}$ 区域斜率 $k_{SE\Theta}$ 方程

$$k_{SS1} = -A_{S1} [\alpha_{1S1} - \alpha_{2S1}], \quad \exp[\alpha_{1S1}(x - x_{01})] \ll 1 \quad (1.129)$$

$$k_{SE\Theta} = A_{S\Theta} [\alpha_{1S\Theta} - \alpha_{2S\Theta}], \quad \exp[-\alpha_{2S\Theta}(x - x_{0\Theta})] \ll 1. \quad (1.130)$$

通过迭代计算，可解得级数中各分段待定常数，具体迭代方法可参照资料 1 中计算内容；一般地，经过一次迭代就可获得比较稳定准确的数值结果。

如果函数 $y = f(x)$ 或数据曲线在起始段、结束段有限，或对曲线二端开放性形态不作特殊要求，可进一步取在起始段 $\alpha_{2S1} \approx \alpha_{1S1}$ 、在结束段 $\alpha_{2S\Theta} \approx \alpha_{1S\Theta}$ ，有级数整体偏移量 $\lambda_S \approx 0$ ，则方程（1.125）式即表示为简略的双曲正切级数形式

$$f(x) = f(x_{01}) - A_{S1} + \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} A_{S\Lambda} [1 + \tanh[\alpha_{S\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]], \quad (1.131)$$

这里自然数 $\Theta \geq 1$ 、 $\Theta \geq \Lambda \geq 1$ 。

方程（1.131）式待定系数少，计算快捷，其亦可作为方程（1.125）式的估算方程，然后在此估算方程上细调得到方程（1.125）式的具体形式。

对于数据曲线，应用方程（1.125）或简洁地应用方程（1.131）式及其适当变形方程形式，可初步给出数据曲线的变化趋势，进而有针对性地作出短程、乃至中程趋势预测。

在更为深刻的层面上，数理方程及逻辑框架是舟楫、是桥梁、是台阶，同时亦是藩篱、是束缚、是障碍；轻视数理逻辑体系显然是不合适的，但若离开数理逻辑及模型方程就难以理解自然及本身，则毫无疑问是步入歧途了。

自然不仅仅是数理逻辑模式的，其仅仅是在某一层面的一定阶段显现出简略的因果递续趋势性，无穷背景层面的交互影响经短程局域平滑理想化等效为简单的函数形式或近似常量。自然含容逻辑，自然超越逻辑，自然具有无限的创造性。

偶尔安适闲散、轻浅平淡，亦乃人生美好时光。

从 然 浮生寄旅，亘古朝夕；花月六道，清静十地。

如 是 一路二三村，古渡四五人；江畔六七峰，八九十朵云。

忆故旧 昨夜西风度园林，解落黄花满地金；恍然精舍钟声启，狮子座前皆故人。

冬 日 岁寒飞雪漫苍溟，平野素寂入梦境；午后斜阳含春意，疏梅弄影伴琴声。

1.2.11 生物生长曲线的趋势性方程与自然现象演化的短程原则

生物体形成、演化、及死亡，是包括自然科学、哲学及宗教等领域在内所有学者直接面对的问题。

仅在生物的系统结构及形态层面讨论，生物体可初步简化成穴、穴道及生物弥漫层，控制结构生成及生长的程度可分为主程序（正主程序）及副子程序、副主程序及子程序（正子程序）二组部分，其分别存储在细胞核与细胞质内，即细胞核中含藏主程序（正主程序）及副子程序，细胞质中含藏副主程序及子程序（正子程序），各个正副适配。在内外激励适宜时主要的调动方式是：细胞核中的正主程序调动细胞质中的正子程序、细胞质中的副主程序调动细胞核中的副子程序。与此同一细胞的细胞核与细胞质之间的同胞调动过程类似，相匹配的不同细胞的细胞核与细胞质之间、细胞核与细胞核之间、细胞质与细胞质之间，亦会产生相应的异胞调动过程。而在特别极端情况，细胞核中的正主程序会调动同在的副子程序，即同核调动；细胞质中的副主程序会调动同在的正子程序，即同质调动。

除此一般构造分布外，还有特殊情况下的缺失构造分布及反常构造分布；主程序与子程序之间也会发生调动功能反演。

生物演化的外部原因来自生存环境的激励，演化的方向从低能力期改变自身适应环境（Darwin 进化）到高能力期改变环境适应自身；从寒武纪以来的地球生物演化过程证明，良好的环境促进了生物的繁盛、分化，艰苦的环境则导致了生物的异化、衰灭。

由自然演化平衡法则，生物生长是个体与环境不断进行物质、能量、信息交换的开放性动态平衡过程，同时生物个体也作为其它生物的环境构成部分相互作用关联，共同参与动态平衡过程的演化。

历史上，有些研究方向，一方面是前人提出思想及基本思路，后人持续探讨并发展，给出框架性理论体系；另一方面则是前人提出设想或草案，但由于各种原因，还基本滞留在设想层面。实际上，诸多大师级设想，都有其相应的自然现象感应在起作用，需要的是在合适的时代给出揭示途径。如此，年轻学者于筑基后学术生涯的适当时期，在完成岗位工作的同时悄然做些出格跨界乃至逆向反叛的研究，或将是其成为祖师级人物的一个剑走偏锋选项。

作为探讨，一个研究方向是植物之间及植物与动物之间的开放性信息交流；其中植物在感受自然环境变化及受到动物保护或伤害后，与其它植物之间的信息差别化交流，以及信息在植物种子及嫁接后的继承性研究，植物对其它植物及动物表现出的亲和与排斥的信息形式，信息传递媒介、信息波动的横波或纵波或混合波或新型波属性及波速，等效信息波生成及对植物的激励研究等，以及植物群落之间的信息交流，都是很有意义的探讨内容。通过数据采集系统，研究分析关联植物受激后的物理量协同变化趋势，可进一步确定深入研究的方向。

一般地，对于生物个体及团体，最大程度的资源汲取，同时最小代价的成本付出，是其本质特征。这其中，仅对于理想的绝对封闭系统或等效封闭系统，自由付出及资源均衡才可能短暂地呈现出来，但稍纵即逝，具有暂态特征，不具有可持续性；积累、掌控和延续，是生物的内秉属性，同时也是种群之间及种群内部状态波动或动荡的根源；所谓的自由是有相应限度的，超越限度则导致原有状态迅即转变、所在系统随即崩解；所以在人类社会等附近层面的生物界构成部分，理想国度或自由社会是难以稳定持久的。

人类社会的一个普遍的现象是：在困境中人们一方面迫切盼望出现新的领路人指引开创新局面，而另一方面又不太相信或是不太愿意相信新的领路人可能就在眼前简素沉静站立着。

人类社会是自然界因缘和合的产物，生灭伴生是其基本结构，生住异灭是其根本演化规律。诸如对于一个开局基础主要类似或等效为公有制的国家模式，统治集团核心层在瞬息万变日趋动荡的国际形势下敏锐察觉并准确判断出宝贵的安全发展机遇期，随即审时度势大魄力地按照动态比例试探性采用多种所有制经济共存模式，此是国家发展阶段性破局的强有力措施，可互补发挥相关所有制经济的增长优势；但在显著增强国力的同时，也对政治根基层面触动较大，尤其是在持续引入外界资本介入之后，其中实行的公有企事业单位改制重组及持续实行的私有制或等效私有制使得国家部分珍稀资源被极少部分人近水楼台抢占先机大规模获取拥有并迅速积累巨量财富，而保留的公有制部分也很快成为随之兴起的门阀士族的掠夺瓜分领地，然后为巩固所得利益向政府权力机关渗透实现官商结盟，进而资源及财富通过制度保障持续流向少数豪族，统治阶层开始设计的先富者带动其余最终实现共同富裕的预想大比例落空，变革带来的利益主要被少数幕后权贵获得。

这其中，来自国外财团的大规模浸润式趋利导向对政府经济决策及长远规划制订的影响尤为显著，甚至会在政府决策层持续生成隐形代言人，而变革的成本及风险却几乎完全由底层民众承担，国家权力机构在资本的激励下发生潜移默化的几乎整体性蜕变，社会贫富差距显著加大，阶层渐趋固化短期内不可逆转，阶层向上跨越愈发困难，由宗室主导的大阻尼社会特征趋于明显，行业诸侯及地方豪族渐成气候相互交织角逐愈演愈烈，权力及财富成为社会各阶层的生存目标及进取动力；社会游戏规则是由上层统治集团制定的，平民入局已同玩物，欲想逆袭分利，几近妄人执梦兑现稀有可能。

处在这个关键阶段，若实行理想化的剧烈社会改良，则短期效果会很显著，但最后易以失败告终；阶段性地国家有逐步趋向于类似独裁或等效独裁、甚至家天下或等效家天下模式的可能性，并将形成相应制度予以法律保障，国家在这个过程实质上将从官僚制向贵族制转化，宗族的利益逐渐至高无上。这是社会变革或改革在破局阶段的代价，而且社会在变革中发展的关键时期总要收割或牺牲一部分社会阶层的利益，重要的是其将深刻影响甚至颠覆几代人的信念及希望，后续的统治者即便想为普通民众谋求一定程度的平等权益或社会福利，但多时只能微幅度小规模尝试，而无力从根本上削弱或动摇上层既得利益集团的壮大趋势，且很大程度上统治者在关键时期还需要这些既得利益集团的支持及提供一种动态平衡；这也是对国家统治阶层政策应机调整及相关势力平衡应对能力的考验。

民心散易聚难，每一次的社会动荡及危机所造成的损失最终都几乎由底层民众承受；极端地，当底层民众已经达到承受的极限时，统治阶层仍然认为民众还可持续承受冲击；可又有谁真正关心普通民众的生计与疾苦、能够坚定地一直与民众站在一起同呼吸共命运，而民心朝向变化直接对应并参与着国家的兴盛衰落更迭周期进程；悲乎危哉，无复于斯；是故，当一个国家被统治者把玩戏弄坏了的时候，也就该改朝换代了，随之新的统治者应时继续踏上兴衰周期的道路，罕有例外。

根本上，世间权势、财富及眷属等，随缘如潮来去，依本心施力就好；对于尘世诸有为事务，因无法永恒完满，故无需穷竭身命，适度适宜即可，而且其大多数只是假途经过而已。

世事有生必有灭概莫能外，生灭伴生及生住异灭是所有生物体宿命，而国家作为等效生物机体其命运亦复如是，在近乎根本上都是因果递续流迁辗转或重启再来，其超越可惜与不可惜的情感认知层面。

在更深刻的意义上，死亡亦是自救重生、再次选择的过程；生物个体生长的阶段性、有限性、细节周期波动性及整体饱和性，是与生存环境相互作用的动态平衡表现。

阶段性局部地，由于生物个体生长曲线在极限上具有饱和性，部分地呈现出缓慢增长或缓慢衰减趋势，故其生长特征量曲线方程 $y = f(t)$ 一般具有 (1.125) 式的形式

$$\begin{aligned} f(t) = f(t_{01}) + A_{S1} \frac{\exp[\alpha_{1S1}(t - t_{01})] - \exp[-\alpha_{2S1}(t - t_{01})]}{2 \cosh[\alpha_{1S1}(t - t_{01})]} \\ + \sum_{\Lambda=2}^{\Theta-1} A_{S\Lambda} [1 + \tanh[\alpha_{S\Lambda}(t - t_{0\Lambda})]] \\ + A_{S\Theta} + A_{S\Theta} \frac{\exp[\alpha_{1S\Theta}(t - t_{0\Theta})] - \exp[-\alpha_{2S\Theta}(t - t_{0\Theta})]}{2 \cosh[\alpha_{2S\Theta}(t - t_{0\Theta})]} + \lambda_s, \quad (1.132) \end{aligned}$$

这里 $y = f(t)$ 为生物生长特征量（诸如主体高度、包络体积等）， t 为生物生长时间， $t_{0\Xi}$ 为各生长阶段中心平衡点位置的时间。

同样，曲线方程 $y = f(t)$ 的诸阶段亦可应用广义偏对称方程 (1.32) 式、(1.33) 式予以较为精准的描述刻画。

更为简洁地，生物生长曲线方程在趋势上可进一步表示为级数方程 (1.132) 式的全部双曲正切函数表述形式

$$f(t) = f(t_{01}) - A_{S1} + \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} A_{S\Lambda} [1 + \tanh[\alpha_{S\Lambda}(t - t_{0\Lambda})]]。 \quad (1.133)$$

依据方程（1.132）式，可以对生物生长从一阶段过程到多阶段过程予以趋势性描述；其中对于三阶段的生长过程，典型地在极限上具有缓慢衰减特征的方程曲线如图 1-5 所示。

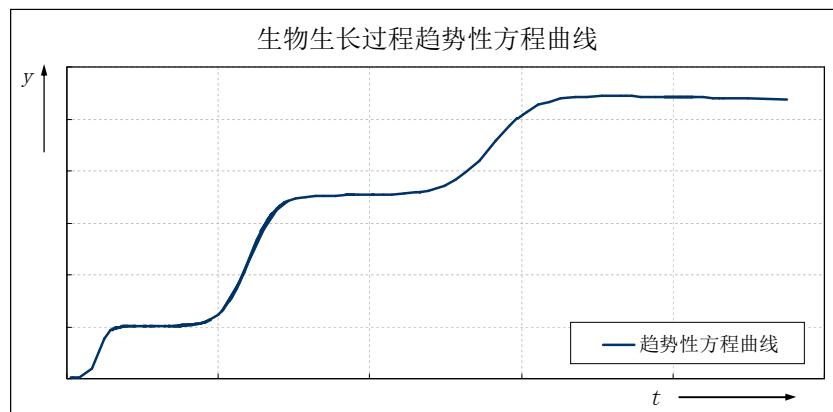


图 1-5 生物生长过程趋势性方程曲线图

Fig. 1-5 Curve figure of of tendency equation of biological growth process

图 1-5 所示曲线在整体趋势上呈现出广义饱和曲线特征，趋势性特征划分上其包括系列阶段性的子饱和过程，或系列等效子蠕变过程与子饱和过程相复合的模式。

特别地，植物种子在萌发过程中从吸胀开始，经萌动及发芽，到幼苗初成的过程曲线特征，即接近一阶段性的等效蠕变过程。

自然演化平衡法则阐释了现象演化的阶段性、开放性、平衡性、因果转承性、饱和性及相变系列性，是描述现象演化过程的广义极限理论，具有相应的长程性质。

下面初步给出自然现象演化的短程原则及其在小规模层面的展开阐释。

在自然现象演化较为朴素的短程细分层面上，有三个初步浅显的近似性的原则，即物质存在规则、状态演化定律及互补原理；这三个短程原则对于深入理解自然现象演化的机理和趋势具有导引性意义。

物质存在规则：物质系统总是处在与环境交换物质的过程中，交换过程质量守恒。

状态演化定律：物质系统在环境激励的势差或环路中以能量作为中间量进行演化，各层面系统演化自有其相应特征的能量方程形式及适用范围，演化过程层次性能量守恒。

互补原理：物质系统的存在状态与环境尽最大可能互补，互补过程历史信息量守恒。

这三个原则，总括起来，即是物质系统总在与环境交换物质，在环境激励的势差或开路循环中演化，其存在状态与环境尽最大限度互补。

此三原则初步兼顾自然科学、哲学及宗教，是认识及理解自然现象演化内涵的初步阶梯。动态开放、演化损耗、最大适应，是物质系统与环境之间相互作用在物质、能量、信息三个方面的显著特征。

其中依据物质存在规则，物质系统总是处在与其它物质系统的物质交换过程，或者通过共同背景的等效交换物质过程中，其成住坏空总是处在相互关联的动态网格上。

依据状态演化定律，系统一般是在一种势差或环路中以能量作为中间量形式进行转化。这种在势差或环路中的功能转化，本质特征是具有连续性，转化率小于 100%，即总有一部分不能完全转化，甚至在极端情况下朝相反功能方向演化。

依据互补原理，互补过程历史信息量守恒，此信息对于生物体具有业的属性，其直接等效于经典“假使经百劫，所作业不亡；因缘会遇时，果报还自受”的阐释；狭义上，此处业是指本业或业的内核部分；业有惯性，业有感召，业有附加（正负增殖）；造业、消业互为逆过程，虽然在近于究竟层面，业本空性。

机械势能差（部分势能转化为动能、电能），热力学第二定律的温度差（包括热机 Carnot 循环特征），电路（环路）中的电压差，诸如此类的阐释描述都是这方面的例证；当然毫无疑问地，在极端情况下部分这类演化过程会出现微弱的逆过程或反常效应。

由物质存在规则、状态演化定律及互补原理的展开阐释，物质系统总在与背景相互作用，状态转化过程存在一定比例的能量损失；其中在生物体吸收消化过程，亦存在一定量的渣滓及腐败，即每一生物体都是包含一定量的渣滓及腐败的载体或复合体。

1.2.12 生死伴存与时时中阴

历史上, Newton 力的概念、Faraday 场的构思、Maxwell 位移电流的假设、Boltzmann 熵的参量表示、Planck 量子思想、Bohr 能级跃迁模型、Heisenberg 同位旋及 Higgs 质量生成机制等工作, 都是具有贯穿性的卓越研究成果, 光滑稳健地连接联合了原来若干分立的基础性原理理论。

科学家的探索研究, 使得远天的星辰与眼前的微尘在趋势上统一到一个框架体系描述中, 能够重复实验及进行相应的预言验证。

但目前的主流科学, 还基本徘徊在机械论的框架中, 对人的生老病死过程还缺少深刻认识及了解, 诸如对中阴身(或中有)这类观点, 仍未予以应有的足够重视。

根本上, 从入胎开始住胎, 此世的生与死即已同在伴存了; 人的一生, 如果没有对生死伴存一体、生死流转迁移、生死解脱次第及生死一如本相四阶梯具有深刻证悟及从容把握, 则无论如何这一生还是虚度了。

在局部环节上, 随缘辞世, 许多时是人生最后的自救重启方式, 最后的自我尊严保护途径, 让自己和亲友都放下了, 挥手作别一段尘世旅行; 为生住异灭作注解阐释一时时临终, 为生者未来展现序幕提示一念死尊贵; 让生者随后的人生更为练达通透、包容谅解、平实慈悲, 更加珍惜余下的岁月及相互陪伴的亲友。

对即将进入死亡过程的临终者适机引导开示是极其必要的; 在此生死流转与生死灭尽转化的临界相变关键时刻, 知机准确的引导将深刻影响, 甚至决定临终者下一阶段生的朝向或直接跳出轮回的路径。而随后陪伴逝者的至亲密友时, 既不强力压抑悲痛, 亦不激发伤感; 既不刻意回避或遮掩现状, 亦不深切回顾或触动过往; 让情感释放如同江河自然流入沧海一样, 平平素素安安缓缓; 这也是人生共同悟道证道的重要构成部分。

人在生老病死过程的中有或中阴身, 一般严格指人此世死亡之后与下一世入胎前这个阶段的演化状态, 其连接死亡与转生之间阶段; 在修行的广泛意义上中有或中阴身亦指诸转折连接过程, 其中进一步细化包括时时生灭、处处生灭, 即时时有、处处中有, 大观为轮回中有。

娑婆轮回过程, 对于一般的众生, 既有累世宿业的承续, 又有隔阴迷障的遮蔽, 可以阶段性地轻装重新开始; 而对于深入修证的觉悟者, 则能够洞彻无数劫以来的因缘业果, 平等离相慈悲济世。

回顾并总结先贤著述典籍, 于内在机理的简略层面, 一般动态地, 从异性相互吸引组成家庭, 和合亲密, 宿业因缘引导, 有生物处在死亡后与转生前阶段的中阴身形态被业力吸引参与其中; 在未来胎儿性别的选项机理方向, 动态阶段性地, 父系势大时, 中阴身恋父则生女; 母系势大时, 中阴身恋母则生子; 在结构形态上表现为, 胎儿抱母为子, 胎儿背母为女。特别地, 当父龄倍超母龄时, 易得子; 父与母智商都较高时, 前一、二胎的婴儿易少智多障(一般多为因缘奇转昧前藏形度世者或大转折宿业合偿示现者), 而后面婴儿智力则将与父母持平乃至高出些许。

中阴身与父母因缘、兄弟姐妹同胞因缘或同室因缘, 交叉重叠, 乃是共业结果。而且在胎儿出生后的初始阶段, 先接触婴儿的人, 将会对婴儿在未来的智力发育及性格形成等方面产生较大的影响, 其对婴儿的后天特征赋予及塑造作用较大。

较为顺利的过程是, 从中阴身入胎开始, 经住胎、出生, 再经婴儿、少年、青年, 逐步到中年、老年、暮年, 进入临终、死亡过程, 身心次第分解, 前世所为历历重映, 累劫业力层层推引; 若未向上解脱或向下沉沦, 则又进入中有阶段, 中阴身依累世业力牵引再次开始进入入胎、住胎、出生等过程的循环; 其中在极端时乃至会出现夺舍及共舍情况。

阿赖耶染净映虚境, 末那我执幻有境; 意识分别和合境, 转识成智无住境。

生命因缘流迁, 若阴阳相吸、酸碱中和相伴或交叉次第呈现, 是为一般规律; 还有少许比例的别业相反相悖特殊过程, 千差万别不一而足; 或是那姿容娇丽如花笑颜、或是那棱角分明伟岸可亲, 或是那声音婉转灵秀可宜、或是那谈吐儒雅气度恢宏, 虽是皮肉小相、浮华神采, 但凝结在心底, 慕强护弱, 幻因幻果, 辗转缠缚, 挥之不去, 难有尽期; 累世因缘, 显隐含藏, 冤亲债主, 多因共果, 确是不宜给出绝对的定论。

世间凡事都有生灭因缘及前引预兆，宽容及忍耐亦都有其弹性限度；家庭成员若持续作闹而不顾及亲人感受，一事不顺意即决绝否定前期所有，则在一起的缘分就快耗尽了；国家统治者若只想加固自身权威及尽量满足宗室利益而不体恤普通百姓生计艰辛，以为皇权神圣视民众微若草芥，则江山社稷就快改朝换代了。从乡村到城镇，从都市到国家，及世界上国家之间的功能性动态多层次互补此消彼长，乃至山水草木，季节风云，包括星系形成及运转演化，成住异灭，亦复如是。

此娑婆世界，生死死生，贪欲我执为主旋律；社会分层分工，诸层调用；主程序调用子程序，战略层面调动诸多战术层面功能，层层嵌套协同运转，底层养料诸层研磨精细上传。这使得社会上成年男性多攀附权势，而女性多仰高慕强；传统上，攀附权势与仰高慕强是进步与成长的体现；但在进入圈子基本稳定后，如果往操纵权势与驱高驭强方向发展，尤其是跨过了显隐不定变幻莫测的动态平衡点，则极易导致覆灭性结局并前功尽毁；此非不幸或悲剧，实是私欲膨胀自信超限未能量力适度而过执于贪嗔痴慢疑诸念所致。

人到中年常常有诸多烦恼萦絮心头，这是娑婆世界有情众生共业遍布缺憾的本来特征；想想自己是否没有选择好出生时机及家庭，学习的专业是否选择的不合适，工作的岗位职业是否选择的不对口或基本不擅长，伴侣是否选择的不称心或较为勉强，等等；如果目前对这些既成事实自己都没有能力改观破局，那就直接选择阳光乐观思绪，平实度命努力提升以待天时。

在人的一生赤诚真意或装扮演饰交织中，毫无疑问能力及品格是重要的，但能力是否得以充分发挥最终取决于选择阵营的战略眼界及广大心量；这是动态的过程。极端地，过于僵化与过于变易的人际思维模式往往会使得卓越的能力及辉煌的功业成为人生的负担和缺憾。

在尘世间，苛责求全欲成完美是不现实的，至少主体自身就存在阶段性或短时期难以改善的诸多缺陷及不足。在朝堂上，适当的谋略迂回迟钝糊涂、缄默敛目乃至些许世故自污是需要的；如太过恪守清廉卓尔不群，则有刻薄冷酷、越众望誉之嫌，难以走远且易招致灾祸。

思想决定朝向，知行合一决定实际高程度。在历史表观上部分代表性地有，天地君亲师分阶置序，以伦常仁义为结构主线，其固守易致愚忠；有无生化无为待机，以居柔合道为演生主线，其隐势易谋权诈；因果递续苦海幻世，以离相解脱为清静主线，其空绝易引狂慧。

世间事物演化具有多阶段、多层面的特征，凡事皆有阶段性的层次性的简略规律，同时凡事不能一概而论，在跨层面长程时也包括这句话本身。

淡 然 因缘适度，知机陌路；多涉一步，善果颠覆。

如 如 心识融色法，色法逸心识；生灭不二相，离相启悲智。

惜 缘 相逢已然超所愿，何因小节否从前；纵是缘尽当祝福，陌路朝夕保平安。

行 路 自古人生难圆满，几多期许萦心间；随遇春景化秋色，历经沧桑仍少年。

1.2.13 国家更迭的基本规律与遥远的乐土

1.2.13.1 一个普遍效应

在人类社会中，权力岗位比其他岗位能够更轻松地拥有更广泛的可交换资源、更便利地获得更多的综合利益，乃至官师等效、在位通吃、抱团扩势、平台交叠等成为榜样典范，而俯就谦和只是偶尔为之，居高临下乃至碾压式的优势状态是其本质特征；在授予权力的同时，优越及腐败就同时生成了，也即腐败是权力机构的伴生现象；若完全清除腐败，则亦几乎随之解除了权力，机构即相应解体，然后将出现新的权力机构，随之伴生新的腐败。

这其中，特权阶层是国家组织机构的必然产物及重要构成部分，即特权阶层的出现是必然的，其或隐或显地存在于横向相对紧密的立法、行政、司法机构中，存在于纵向相对松散的宗教团体（及部分社会精英）、政府机关、军队武装组织中；帝王通过调整操纵及动态平衡特权阶层的各方势力达到平稳运转国家的目的；不断地粗调及细化特权阶层的力量分布及资源拥有量并适当惠及普通民众，法内整治与法外调节联合作用，使其相互牵制及抵销一部分对国家发展不利的因素，尽可能在大略上共同趋向国家的整体发展方向，是帝王治国的重要环节。而辅佐帝王的基本要义则是在唯上唯国、唯真唯民等数者间适时动态平衡中稳健把控，看透尘世功业幻相，明晓凡事终有兴罢，没有恒久常在的信任与包容，只有相应社会状况下的合作过程，在与帝王的密切期结束前审时度势适机退出，悄然隐迹于自然田园的晨曦晚照中。

一个若隐若现的普遍效应是：一般地组织机构或个人，当你对其奉献出全部身心确认归属后，你就不再原来处于外围位置及临界状态时那么重要了；一旦稍有服从迟缓或想法异议，即易招致不满或斥责，原来的谅解及包容几近于全然消失；你如果进而表现出些许不理想、不值得、乃至渐生退意，则将进一步招致猜忌和防备，你将被多次明里暗里考验忠诚程度，被多次岗位重置及身份标识，你将在此过程中失去部分自我并付出大部分核心代价；这是由人性的深层我执贪欲弱点及社会的边际操作价值取向导致的综合结果。

特权阶层导致绝对明显的权力级差，而权力级差则是优越及腐败的根源。

各级官员及一般民众普遍憎恶又艳羡未得到的特权，而一旦得到某阶特权资格则总是会维护既得特权地位。尽除腐败几乎是对先前所赋予的权力的否定，预置或先验地彻底除腐败将鲜有可用之士及难以组建权力机构；在被授予权力的同时，作为交换亦将默认失去部分乃至大部分的自主自然的纯粹品质，而成为部分权威和部分奴性的复合体，其根源即在于统治阶层及帝王权力本身带有显著的私欲动力内核，国家统治者的更迭是统治权力的流迁过程，帝王统治内涵在根本上不会有大的改变。

在外部世界环境与国内各势力之间进行平衡，以最大程度地保证王权稳固及按预计设想顺利传承，包括强力转化乃至设局清除对现在王权及未来王位继承者具有潜在威胁、或具有威胁基础、或将成为障碍、或具有潜在阻碍力量的卓越功臣、势力集团、乃至王室成员，是在位的每一帝王所首要考虑并实施解决的问题；帝王的尊严、王位的坚固、传承的稳健、裂痕的消弭，是第一要务，王位以下诸阶权力岗位皆需围绕这一中心极致运转，古往今来极少有帝王能够超越这个层面；这是帝王及其以下诸阶权力岗位的宿命，是社会划分动态阶层进行运转的目的，是自然现象演化法则在人类社会结构中的表现，是诸层面培育再继而层层递进收割的缩影。

娑婆世界我执炽盛，贪欲绞搏直至灭尽；慈悲规劝可现忿怒相，善意引导可出狮子吼。

世界的常规生存法则则是弱肉强食、利益至上；国际上大国之间的有效平衡，主要是能够在战略上部署有直接威慑对方国土中其国家运转动力核心及决策指挥中枢的机动打击力量，诸如公开预评三波以内大体可定战局，实际则一波即可定分晓；战力决定国家尊严，和平依靠善战维持动态平衡及局势转化引导，以战略威慑为主辅之以适机小规模快速战术打击配合，大谋略转化高胆识覆盖，恩威并用仁智互济。

娑婆诸事，因缘幻现，共业缠绕；初步接触开始心生欢喜时，优点往往被彰显光彩，而缺点则成为鲜明个性被包容；当缘尽开始心生厌离时，缺点常常被无限放大，而优点则成为过往诱惑的罪恶种子。异层之间过于亲密的接触，会构造彼此阶段性的局部等势线或等势面，甚至直接全方位拉平阶位及辈分，其多是埋下无尽的人生隐患及招引难以消解的尘世烦恼。

尘寰苦楚似是无奈，人生幻相无须当真；困境时再坚持一下或有转折，顺境时当留有余地日后回旋；处劣境时不染鄙俗，居胜境时不生轻慢。承载滋育，含容随顺，智悲无际。充分尊重众生的业缘因果及根基认知；适时缄默，示现自觉；随遇导引，幻化娑婆。

在社会诸层运转演化过程中，好的因缘组合，相当于和宜的配比掺杂，形成的共同体优势得以加强，不足得以弥补，能够大幅度提高多方面性能，并延长整体运行期限；差的因缘组合，相当于在原有机体中浸入杂质，长处相搏相消，劣势叠加放大，使得后续的复合体整个性能下降，且寿命随之缩短；而究竟都是因缘业果缠绕、结业消业，无所谓优劣好差。

社会特权阶层固化，加之在外界力量的导引下，将导致部分平民阶层的思想觉醒及力量崛起，其成为平民阶层的代表走在争取公平进行奋斗的前列；当其与部分中间阶层力量结合夺得天下掌握政权后，成为治国的当权者管理国家，由平民阶层的利益代表转化为管理平民阶层的官员，一般在初期励精图治、奋发图强，国力随之逐渐恢复，在中期特权阶层呈现，在后期资源垄断、降维碾压、腐败滋生，从开始青涩品尝权力的滋味到老练谙熟极尽贪婪哪怕万劫不复都难再回头，视普通民众如同草芥，不在眼里亦不在心上，掌权者一般不出三代，即渐移到平民阶层的对立面；跨越若干阶层的权力争夺及派系斗争代替了原来的施政理想，残酷打压与隐伏妥协成为主旋律；不出五代，统治者即完全转化为统治阶层的代表，从前祖辈的平民挣扎生活状态及初始奋斗目的成为遥远的故事和传说，现下的普通民众依然为统治阶层的基底养料及社会危机缓冲承受带，所谓民众选举亦几近政治假象，独裁模式渐成制度，联合议政组织转变为忠实执行机构，以极度功利为内核驱动的官僚主义与形式主义相伴泛滥大行其道，甚至连维护普通民众权益的表面文章都不屑再做了，贪腐时几乎不再有深重的罪恶感，通常的霸道随意及不容置疑是权威的充分体现，乃至偶尔于不经意间表现出对自身优越及权威的淡淡厌离则最是极致，普通民众权益及正义宣传更多也只是统治层派别之间权力斗争的工具，亦是统治者的暂时性谋略治世手段。

在这种情况下，社会公平权益机构成为维护帝王至上权威而歌功颂德粉饰太平盛世的寄生衙门，宣传提倡公共美德及社会义务实则在维护统治集团的超国民既得利益及优越地位，监察监督等机构除在派别斗争中分化打压异己及诱惑笼络中间力量之外基本装聋作哑形同虚设或别有意图待势而发，进而再次出现特权阶层固化，超然优越全面垄断的门阀士族亦随之形成并逐渐趋于规模化，原来的平民基本依然处于平民阶层，回归于半生半死任由逐层官僚驱使奴役、盘剥压榨，而又只能忍气吞声听天由命、卑微末路无以为靠的临界状态。

1.2.13.2 投影复现

一定程度上，一个国家的特权阶层及门阀士族几乎是帝王独权思想模式在重臣及内侍群体的投影复现，官吏贪腐现象难以根除的主要原因乃为大比例握权者即是相关或类似的系列贪腐事件的直接或间接参与者及获益者。这其中也包含若干适机自污入圈站队表态及主动授人以柄以示效忠的官场游戏规则操作。普遍地，当做官成为一种职业及谋生岗位，官场操作需要技巧及艺术时，国家前途及民众福祉就不再是官员们首先夜以继日思虑的问题了；个人晋升铺垫及家族命运提升才是首要关注的根本事情。一般地，权力需要财富的支持，财富需要权力的保护；权力集团在得到财富阶层支持的同时，总是想尽可能不受财富阶层的约束及驱使；而财富阶层在获得权力集团保护的同时，亦总是想尽可能减少权力集团的盘剥及收割；相互培植渗透，相互猜忌设局；或忽而精诚一体，或忽而若即若离，或断然决裂火拼开战，此消彼长，推陈出新；其导致的社会变革及动荡周而复始，永难停息。

目前对于任何一个国家，社会民众都是国家的根基所在。当一个国家的特权阶层固化到一定程度时，相应地国家就会逐渐失去原有活力并显现僵化状态，整体发展即出现缓慢、停滞、乃至倒退现象。如此，在适当的时机进行社会变革是统治集团自救的首选途径；其中针对削弱特权阶层权力和利益的变革，来自权贵的持续阻力较大，变革在过程中易被中断，而且这种变革在一定程度上是统治者适机主动自我革命、隐性自我改朝换代的过程，本质上亦是新的特权阶层代替旧的特权阶层的过程；逐步分化瓦解招抚相关特权阶层，持续变革下去国家一般能够维持一段时期；若在变革过程缓急适当、策略有据、稳中取变、沉着灵活，则变革过程虽然艰辛但能够激发并释放出社会的整体活力，乃至国家将继而走上中兴之路；如果选择直接或间接加重普通民众税赋的变革，并继续维护甚至加强特权阶层的优势权益，则变革表面上容易实施，短期效果也较为显著，但却是加大幅度动摇了国家的根基，在极端情况会将国家推向不可逆转的快速衰灭道路。

国家更迭的基本规律是：先辈以拯救觉悟天下民众为根本初衷，掌握统治权后继续领导驱动民众经二至三次左右的中兴或复兴推动社会繁荣，在大仁政主要面向强国与小仁政主要面向富民之间适机调整布局，对外纵横扩张再均势收缩，于内培育典型再树立权威；随之社会贫富差距逐渐加大，阶层显露并趋于固化，统治阶层延续几代后一般会演变为以奴役压榨民众为当然权力，官僚主义及形式主义盛行，宗室不劳而获穷奢极欲，政府官员体制性贪腐嚣张无忌，底层民众生活艰难无以为盼虽生犹死，政府财政支出逐渐恒大于上缴收入继而负债持续加剧，如此新的改良乃至反抗力量随之萌芽昂扬崛起，且其多以提升底层百姓地位和创造理想公平社会的名义及使命立旗聚众，在极端情况会直接导致国家动荡乃至朝代更迭；从上到下，依序层层牧驭奴役，达到极限或临界状态后，再周期性绝地逆序反杀；主线脉络在国家层面上表现为适机奋起，强力扩张，平衡收缩，虚弱解体；在国家结构层面上表现为大乱大治，大治兴盛，兴盛腐败，腐败大乱；如此在宏观趋势上形成开散的等效周期性演化。

这其中构建的理想公有制体系，当偶尔由贤人善者治理时国家能够最大限度地发挥整体功效，并会适当顾及普通民众的生计希望；否则体系即变相演化成外壳表现为公有制标签、而内核主要特征为世袭性轮换型极端私有制的复合模式，即在本质上公有制体系的终极演化趋势为隐秘的大私有制体系，国家成为少数人操纵的场所及抚弄的玩具，随之上行下效，帝贵仕轻，官奢民艰，言路阻塞，世间成为各层当权者及相应门阀士族嗜取利益的博弈游乐场。一般地，开始许以平等兼爱拯救受压迫普通民众名义创建的帝国，随后往往以重置普通民众于社会底层随予驱使盘剥的内核形式运转，帝国也自动步入兴盛衰亡循环；此是帝国宿命，稀有例外。

在帝王治世的角度，一方面不能赋予各层官吏以太大的权力及给予民众以太大的自由，另一方面亦需适当发挥各层官吏的品能正向创造性及不能将民众置于困苦死亡边缘，牢牢把握并适时调整这个动态平衡地带，尽可能延伸帝国上升通道或至少减缓下降趋势，是帝王的重要职责。对于开国帝王及国家中兴领袖，其韬略襟怀及眼界魄力，远不是一般社会学者及江湖术士所能揣度测寻的。

对于帝王，若长期过于集权与过于放权，或在若干连续短时期二者之间极端振荡，则都会导致政局不稳，乃至从快速达到兴盛顶峰随即不可逆转地走向衰灭。适时示好迎合及隐忍等待并暗地积蓄培植力量，是帝王在弱势时的必备品质；集权宽厚与放权制衡的动态平衡，是帝王治世的重要手段。

世事复杂多变，所谓的真理具有阶段性、层次性、相对性及规模性，是动态的概念，且有伴生悖论；同样实践也具有时间的区段性及操作的规模性；若以短程小规模实践或微实践作为检验真理的唯一标准，则是偏于经验的战术性的论断；局部的阶段性的真理或微真理，其是长程大规模真理的构成或条件展开部分，属于真理谱系或真理谱阵中的动态组成部分的真理，并不完全代表长程大规模层面的具有由真理谱系或真理谱阵凝聚而成的真理；进而，短程小规模实践或微实践检验，还不能证明其在长程大规模层面的正确性及普适性。

毫无疑问，此实践是检验真理的唯一标准是重要的论断，但基本属于术的层面的次生论断，可用于前期破局，但若在后立期若仍强力上置此论断，则有陷于短程小规模适用的战术性小聪明而失于长程大规模的战略大智慧的趋势，易止于阶段性台阶为舞台而忘失于台阶跨越及向更高层面迈进的方向。

其中采用术的层面的民间谚语治理大国，低头摸索走一步再抬头观望看一步，试探短程目的尚可，长期运用则易迷失大方向；尤其是过于强调资本及金钱的主导地位时，则社会诸多组织机构及个体单元都将失去应有的尊严成为被奴役的工具，公共资源将迅速被极少数权力阶层及利益集团瓜分占据，背离统治者原本设想的社会诸阶层协同进步逐渐趋于大同的目标，国家亦将陷于诸如良知与道德迅速退化、沉疴宿疾积重难返、表面浮华内在空虚茫然不知所措的境地。

道的层面的战略性大智慧，需要有相应的多层次长时程历史沉淀深刻总结及宏观哲学层面具体运用，含蕴无穷的小术，但其高度及远瞻程度却远非小术所可比肩望背。

因缘果续，应劫辗转；道自循环，道法自焉；道中至道，开环跃迁。

对于觉行者，因智慧故不落于生死轮回，因慈悲故不住于涅槃清净；至道假名，凡圣一如。

在近于根本上，对于统治阶层，更多时人民或民众仅是一种带有朦胧远景或比拟象征意义的政治性或工具性词汇；同样地，对于生活在社会底层的普通民众及处于基层组织的一般官吏，更多时国家也仅是一个象征性的虚拟词汇，而阶层固化及上升通道几近关闭则进一步致使民众的家国情怀趋于淡薄。

处于不同的社会层面，人际关系及处世风格亦有所差异；越往高处或核心走，隐忍及内敛就越重要，内心决绝及霹雳手段也就越发明显；师友与对手的动态范围及含义，站队结盟与游离观望的阶段性选择，思虑牵挂与释怀忽略的事情位面，原则操守与灵活技巧的适机转化运用，智慧和慈悲的内涵覆盖及表现形式等，也都往往迥异于曾经的过往层面。

随着阶层分化向极端方向发展，加之随后出现的平庸统治者居于独裁位置，特权阶层新锐及平民阶层觉悟精英的改革及反抗力量将适机再次崛起，统治集团内部尔虞我诈各立山头首先趋向瓦解，同时外部失去拥护支撑及互动合作，世界其它国家尤其是少数强国以各种人道名义高调干预而实则培植殖民代表或利益代言人推进衰弱进程，国家随即进入新的成住坏灭兴衰更迭动荡周期。

在宿命与创造之间，帝王有帝王层面的思维方式、平衡价值取向、博弈考量及升沉因缘。

帝王，如同微分方程组中的一主项待解函数，方程组中包含诸多其它函数项及阶段性近似常量系数，这些阶段性系数要适当与诸函数相匹配，稳定进步动态可控。在短程上基本可由帝王预置操控，但在长程上则不全在于帝王的操作及把控能力，长程有长程的天规；帝王的智慧就体现是在短程上可控，长程上窥视并逐步逼近天规，乃至引导并参与创造新的天规，进而能够更为清晰自如地描绘人类发展的蓝图，抚弄人类命运的琴弦。

在一般的多因素相互作用考虑层面，帝王开疆扩土、政治家变法图治、科学家探索演替、工程师研制设备、医药家提炼医方、哲学家管窥终极、宗教家示现导引等都具有相通之处；初期满怀理想志齐先祖，中期艰难波折几欲退出，终期随遇出离淡然俯视。

远析帝业卷王侯，根基若浅缓出头；蓄力待时转乾坤，宏图慢展演春秋。

在人类社会或思想及科学领域，开辟一统天下或维持天下一统，其因素主要是个人的才智品格、来自其他强者的竞争收割、时运趋势走向及阶层助力等；在相对较低层面，天下局势几乎与其无关，劳役无尽兴衰皆苦，部分直接放任生命诸般随意去；而在更高层面，所谓的天下就是无常幻世而已，一统也仅是我法二执的虚影，乃至根本就没有天下及一统这些概念。

一个国家，尤其是一个大国，在关键的时候还得靠自己的综合力量，自强是一切尊严的基础。

掌权者在相应的历史阶段需审时度势，恰当地转化国内外矛盾；第一产业、第二产业、第三产业，相互间密切联系动态划分，调整优化产业结构比例；第一产业为固国之基，第二产业为强国之体，第三产业为立国之用；第一产业宜有战略保底红线，第二产业与第三产业二者相融相济、连环并进，尤其在国运振荡阶段不宜偏置；其类似佛典中戒、定、慧三者，以戒为基、以定为体、以慧为用，亦所谓先贤云“定在慧中，慧在定中”，定慧等持，是其要旨。

国家诸层运转机构的每一块材料都至关重要，整个结构的坍塌往往就是在不起眼处于不经意间的一角缺损开始，如未及时补修更替及加固处理，则会逐渐发展蔓延至整体趋于倾斜而不可逆转。

治国即是治吏；特权阶层是帝王在守势待时期间的堡垒，亦是帝王在实行社会变革过程的障碍；消除特权阶层几近于不可能，适机转化及培植新的特权阶层进行制衡及操纵是重要途径。

对于帝王，势力山头平衡、政治站位归属、无条件担责服从，是任用及考核重臣的指标；有效引导、调整、培植、分离、转化特权阶层，乃至帝王需要进行自我革命；与此同时兼顾改善普通民众的素常生计并拓宽基层官员的上升通道，包容民众的认知及对民众生成适当的兼爱，乃至对民众爱国护国运动生成应有的尊重、表达应有的敬意，是帝王或统治者推迟延缓乃至尽可能避免国家步入朝代兴衰更迭周期律轨道的二大法宝。

开疆扩土建国治世，来自各层面各方向对手的锤炼磨砺层出不穷；以远瞻预设为先导，以谋略布局为第一，主导赢局是唯一选择。

谋略布局战胜对手的要义为：依据力量特征对比及环境时节造势布局，牵动并改变对方部署，随之适机集中优势力量各个击破，并在过程中尽可能转化对方力量为己所用。

这其中首先以自保为前提，然后考虑在变局中寻机战胜对方，准确可靠的情报渠道及严格的保密措施是布局决策的基础。

一般大体步骤为三步，即动态布局牵引调动对方向局、入局、出局；首先出明招，于不经意间漏出破绽或诱之以利，使对方心动向局；然后出二次或二次以上相互配合的半明半暗招，虚实结合以虚为主，主要是使疑兵，牵引对方犹豫不决举棋不定，进而改变部署实动入局；整体综合性地，秘密布设使暗招，在机会窗口集中优势力量和奇兵出其不意攻击并与设伏联动，各个击破，达到战胜并转化对方力量使其出局的目的，在心理及斗志上进一步瓦解之前与对方相关联的各股力量，适机分离收服招纳。

大学者的标志是能够给出融合已有知识体系的开放型新构造框架，大帝王的标志是突破已有模式限制主导制定具有前瞻性的世界新规则；祖师级学者及开国帝王甚至在极致上隐约间具有我就是整个世界的恢宏气度和广大心量。

人生各有各的难处和苦楚，各有各的因缘际遇和浮沉轨迹，而诸层面的世界图景就是在抗争与妥协的动态平衡中曲折演进着，人生旅途的要旨即是入世无执、出世回向、善缘自度。

实际上，即使是智慧圆融者，对于有情众生亦有难救度处：起凡心，欲冲动，念速死。

帝王及思想家貌似至高收割者，但其只要有我法执在，则亦终被历史趋势及大道所收割。消融我法执，转化妄我化为大道，进而妄我与大道不即不异，则既智慧自在亦慈悲担荷，无碍开放恒自循环，此为世出世之至高指向。

社会管理规范化、流程化、精细化，亦适度人性化、模糊化、动态化，保持一定的调节弹性，最大程度地降低权力机构运行管理成本，帝王通过组织机构及法律保障诸级分阶段贯彻实现治国意图，平衡各方力量，重启部分旧的势力、联合新的精锐、削减昔日盟友的地位影响，没有绝对的正确与错误，没有丹书铁卷，比过去更为重要的是即下及未来，怀柔招抚与霹雳果决相结合，痞匪刁钻与浩然阳谋相混叠，食调休养与猛药及挽救手术搭配发挥作用，稳健地巩固已获得的帝王权力及权威性，这是政治的本质所在，也是帝王的动态坐标特征及运转轨迹显现；寻机造势重新洗牌，获得支持我上台你下台；制度保障江山永传，以民众利益角度谱写历史新篇。

每位帝王，包括多数的诸级当权者，也包括一些宗教家及科学家，在不同时期、不同阶段，都有不同面向的暗语，一个词组或一个单词即可直接建立相互间超乎寻常的紧密联系；何以故？此暗语，是帝王、当权者及学者的部分心力凝聚所在，或隐深或显微，表象莫测变幻不定，多吉少凶，忍默待成，甚少未决。

在概略上，大道相通。当一位帝王或一名学者将所思虑的艰深问题转化为日常问题，请教在田园里耕作的老者时，得到的答案常常朴直而深刻，并且还往往具有很好的可操作特征。

一般地政治斗争中，真理及真相仅是用来平衡及制衡相关势力山头的动态参考工具；在会议上公然拍案而起或争辩是非曲直却同时环顾与会众人察测反应，则不是在作秀设局就是深层谋略尚欠考虑成熟；足够的有效功夫作在会前，少量的动摇缺失补在会后，谋局造势都在表象之外。

诸多学者型从政者，在朝堂上公开对一个事件及其若干关联事件的依法核定和潜在影响引发辩论慷慨陈词，其主旨或目的往往并不在所辩论的事件本身，而在于借此展现才能及设想，在同僚中投石问路，乃至揣测试探君意趋向；其操作本质是将统治集团这个动态开放的复杂非线性系统近似等效为分时段简单线性系统，通过输入系列函数获得相应输出函数，进而大略确定或估判统治集团的阶段性时段动态传递函数组，意图把握各频带阻通特性的整体权力概要频谱图阵，窥验统治者的喜恶及旨趣所在，以最优适配调转运用施展政治抱负，凭最小风险代价实现人生宏伟理想；实际上此探测操作过程即已在触碰统治者的红线，看似高妙实则蠢劣。若将人生事业作为投机博弈，将旅途中的每一步都做成生意，执念于名闻利养，得势时举目向天，失势时悲感满怀，未在浮沉过程中戳透娑婆幻相体悟大道，则人生结局往往异常困顿难解。

对人类社会，真正的可持续的公平和自由是不存在现实世界中的，甚至难以出现在虚幻的可最大程度进行支配或发挥的梦境中，即便是较为短暂的公平仍需要综合实力的相应支撑。

通常情况下，即使是具有较为深刻思想及普世良知的学者，也多是在离开体制岗位或退休后，才逐步于小范围内试探性表达与主流迥异的部分观点；这已经是很难得了，毕竟学者及其亲友师长也生活在现实社会的动态网格中，审时度势平稳度过人生是首要选择，明晓世间诸般景象及转化只是一幕幕虚拟的开放性戏剧。缄默失责，多言招祸；适机点化，智慧超越。所谓人生是：因缘业果挂名扮自己，随遇应景客串游历。

思想家在书斋里可以构建任意的理想社会公平模式，纵论评说天下分合家国兴衰，但帝王在实际治世中只能根据现有国家机构建制的纵横分布特点赋予尽可能的层次性公平特征；公平具有层次性特征是由社会的运行结构内秉属性决定的。

其中官员的上级考核任命制度，管理官吏的成本最小，但由于几乎决定官员的人生命运及家族前途，迫使官员最大程度地唯上唯权，导致官场任人唯亲最大化及成建制性贪污腐败；直接朴素的化解途径是勉励与警示并举，功过是非与推荐者荣辱联动，动态调整可控，霹雳与怀柔结合，观其大略兼带细节，容人自省留有余地，适时吐故纳新。

思想家为社会的发展提供深刻的理论见解和趋势指引，但多时思想家倡导的理想公平社会往往是幼稚难行的，并对帝王的实际治世形成噪声和干扰；思想家在强调某一组因素变革时容易弱化其它因素的社会作用，而帝王实际治世需要综合考虑国际形势与国内时机及风险评估托底应急预案等诸多情况，且各种相关因素及与之缠绕的利益集团社会作用起伏变化，其中部分事件一旦触发就带有连锁的不可逆、甚至不可控反应。若真由思想家按照其理想模式治世，则往往还远不及所取代的帝王综合能力。

对于国家，帝王拟民众当家做主仅是短期理想，乃至其本质更接近是牧世驭民小术；简单地对比下人生阅历志趣及眼界襟怀、工作资源及安保措施、提供可交换筹码的份量及按预定计划从容晋级、交往层面及处世方式、业余生活及后代培养、家族基业远景布局及阶层结盟联姻互助、退休待遇及殡葬抚恤追封等方面的巨大差别，即知帝王及统治集团才是国家的主人，在整体上主宰着一般官吏及普通民众的世俗命运。

理想设计及事后对错评价与实际治世及探索试错前行之间相隔若干层面；在错综复杂稍纵即逝的时机下进行动态决策，与事后对其理想推演评价，并不完全对等客观；事后见解是一回事，临机践行则是另一回事，见解更多时仅是用来在践行中参考的，通常情况是开国帝王及中兴领袖要远超越同时代的一般纯粹思想家；这其中知行合一、师君一体是为稀有珍贵。

1.2.13.3 一个死结

在历史上，人类现实社会的君权或王权与精神世界的天权或神权（教权）、社会普遍民意及个人功业之间一直存在相互作用及相互影响，在各个历史发展时期表现为相应的诸方面力量强弱臣服、博弈制衡、此消彼长等多种态势，诸如君权天授或君权神授、君权君授、君权民授、君权功授及君权自授等，乃至教权、君权及军权三位一体，成为一个国家的整合象征性化身。

在娑婆世界，阶段性地需要有凡间帝王的综合集约平衡及思想家的精神疏解引导；相对于思想家设想的理想家国图景，帝王在实际治世中许多时都面临远超前者设想的诸多困难与无能为力之处，因为娑婆在本质上就是苦楚有缺陷的幻界，不如意及不尽意时时相伴左右。

在尘世间，大部分民众小私心以对自己及家族的利与弊而或喜或恶他人及事件，部分士阶层大公心以对社会的普遍贡献与危害程度而或赞颂或抨击他人及事件，统治者帝王心则以是否对国家及对君位有助益与威胁力量而或提携或压制他人及事件。现代社会，更多人是三心复合模式，只是三心所占比例在人生的不同短程及长程阶段有所差异变化；其中部分地诸如居百姓位而思天下事、担帝王心，身处江湖之远而忧庙堂之艰难、虑社稷之兴衰。

古往今来，伟大的帝王一般都以深远谋略、超卓胆识及辉煌功业立世，胸怀宽广、气度恢宏、承载包容，通明世事无常、兴衰演替和国运动态远景，清楚地知道帝王及思想家都仅是历史中的过客，没有绝对的英明正确与荒谬错误，王侯与民众皆是因缘和合而成，是故不会从根本上排斥或否定旨在保存并延伸国家传统文化底蕴脉络的长程并行善意思想，而且在一定程度上伟大的帝王本身就是智慧与慈悲的结合体，是知行合一的践行者，在于世界动态格局中坚定地维护国家独立完整权益、促进国力平稳均衡持续发展增强、尽力惠及普通民众年时生计和其后代成长跨越阶层通道等诸多方面发挥无可替代的决定性作用和品格影响力。

对于大国周边的中小国家，趋势上或成为大国的兄弟友邻、或为动态缓冲带，在大国之间平衡互联、周旋取利；在大国虚弱时适时入主大国或参与瓜分大国，在大国国运上升期保持若即若离的关系，在根本上需自主命运，力图避免成为大国的战略工具或转折附庸，更需避免成为大国厨房的食材养料或客厅的摆设点缀；与大国公然对抗是羊角触狮自置险地不明智，与大国深度结盟则是兔随虎行随时身祭更危险；其策略核心即是让大国觉得食之难咽、弃之难安，收之负累、拒之生患。

隐于幕后的大玩家，总是在适时调整远景蓝图，意使前台的勇者愈发自以为是掌控局面的卓越棋手，或是能够通过努力有希望成为左右时势的优秀布局者；而本质上，这一层即使是波澜壮阔的棋局，往往也仅是更高一层棋盘中的几个平凡飞沫网格。

在世俗社会游历，一般地知道真相后，保持缄默，适时逐步揭示真相，与径直曝光真相，三者效果及结局往往迥然不同；且所谓真相具有因果性、阶段局部性、层次性，甚至是局中饵诱诱惑，终究仅是幻相；都是在娑婆世界演戏，因业随缘扮饰相应角色，适当应景参与而无需特别当真。

在人生旅途上，适当地展现下独特的性格是必要的保护手段，要沉淀并磨砺出几项不轻易示人的底牌功夫及可靠人脉关系；随境遇变迁设置相应的长短程动态策略是必要的，尤其对于处于发展早期且立足未稳的力量，先基本自保再试图进取，先立于不败之地再争取更大胜利。这其中，能够优势自保乃至完胜对手的关键法宝即是与对手动态虚拟共情同理而又不为对手所完全觉察感知。

社会在横向上公平特征一般较为显著，而在纵向上公平特征几乎消失殆尽，许多时协商仅是表象，效忠执行及保大舍小才是其根本特征；这其中绝对的人格尊严是不存在的，平台及组织需要的是赞颂及服从、能力加奴性，综合可利用价值是主要衡量指标，而坐享其成者大多隐在幕后，乃至幕后的幕后；不同层级的战略内涵相互依存，但远景意图及目的显著不同，这是由社会组织的内在禀性决定的，是一个集团组织乃至一个王朝于短程或长程呈现周期性强盛、衰退、崛起或更迭的重要本因。

对于帝王治世，在动态平衡中择机演进是王道，适机引导重构及强势再平衡是不二法门。

自然客观地，国家作为一个动态开放的等效机体，其层级机构设置及官吏安排，多以承袭历朝历代的稳固制度为主，此是制度迭代结果的综合延伸；而新统治者所谓的改朝换代开天辟地，终究还是成为接班统治者，承袭延续往昔种种谋略手段，转非法组织为合法化及制度化；老路换新走，中兴后繁荣，继而腐败衰落，这是统治者的天然宿命。

这其中，如果帝王在促使国家在中兴过程透支了国力及民众希望，中兴成本基本由底层普通民众承担，而所带来的利益又大比例被少数几家权贵豪族所侵占，则在短暂的中兴辉煌后，极易使国家走向平庸，甚至是迅速衰落。

优越是权力在握的象征，腐败是权力运行的润滑剂。

周期性形成的权力逾越、资源优先、阶层固化，直接导致周期性的腐败、整治、革新，这个过程实质上为新权势集团替代旧权势集团，且一般地在新集团中仍然嵌套继承着旧集团的部分贪欲内核及权贵优越特征，在持续安定几代后随着财富积累及利益割据，仕途利益的有效获取成为衡量人生一切事务或事业的根本指标，阳奉阴违开始盛行、骄奢淫逸逐渐弥漫、专权垄断日趋彰显，直至监督沦为摆设、公权失去制衡、舆论止于迎合、学者甘作附庸、民众微若草芥，乃至国运耗尽劫数到来、翻天覆地改朝换代，此成住坏空周而复始罕有例外；其中权力反噬、自矜骄纵、膨胀致弱、腐败致衰，比比皆是。

当君王不问民众艰辛，民众不念君王忧虑，官僚成建制化贪腐肆无忌惮而国无惩戒，民众极困走投无路而国无抚慰，官敛财贪生，民艰不畏死，官尊贵而民轻贱，官民相互猜忌戒备，违心赞颂与谎言欺骗充满社会，上下官员极尽心机徽章满襟，上层官员一日之奢靡直接超过底层民众一生之用度，官民远隔甚于云泥，各种繁复的规章制度及执行措施贴满墙壁，千丝万线从底层针孔穿过不堪负累，上层官员的品德操守已不再具有感化普通官吏及底层民众的榜样力量，官与民相互间的坦诚交流成为历史传说，乃至没有几个上层官员能够毫不心虚地坐下来敞开心扉与民众共话未来。

官民同心同德是国家持续强盛及增丰底蕴的根本，而官民同心同德的前提基础是拥有共同的未来。

一个死结是：一般在起事之初，组织层以公平共享天下誓言立旗聚众，但实质上不同阶层已经隐含分置了具有显著差别性的未来景象，只是在成事之后方逐渐分层显现展开；权力的内核在于把控资源谋求高势独断，财富的要义在于渗透权力扩大垄断规模；成事之后上层的强势违约与中下层的无奈被弃，致使诸阶层再没有了起事之初时同心同德的前提基础。

对于中下层的参与者，这个死结导致所有的前期蓝图都在后期成为虚画，即使在可以最大程度发挥的幻游梦境也只是遥远的乐土。

无论是开国还是中兴，这几乎是历朝历代的一个死结。

若民众不冒死反抗并揭露官员贪腐行为，或若官员之间较量仕途未相互揭发，或若组织内部派别间打击不连带系列官员的隐匿诸事，则监察部门基本都放任自流，其根本原因就是上下官员贪腐已经带有普遍性了，甚至是体制性贪腐，同时也包括若干相关立法及执法机构；这使得如果监察部门完全依法明断是非、正本清源，则国家主要运转机构可能几近无可用人；诸多官员假装忠公爱民，实则悦上凌下于中搏噬；普通民众假装低头顺从，实则困顿无奈忍待变机；腐败与积怨重重累聚，隐在的爆发冲突趋近临界状态，如此则距离改朝换代就基本不远了。

社会运转的规则及规矩是由当权者及在位者组织制订修编的，管理相关资源在高位摆布收割别人是其本质特征，基本原则是按照当权者的意愿及利益操作，所制订的法律规章既是保护统治集团的有效弹性屏障，亦是对抵触统治集团的可靠威慑力量；而突破及变更更多是由当权者引导的为避免被保守力量持续束缚或被新生力量挑战颠覆所进行的动态平衡改良。

在短程上坏空多是呈现苦楚的表现特征，而在长程上坏空则多是自救重启、乃至更新超越的一种内在自然运行程式。

在远景方向，腐败有其时间性及层次性，是相对的可转化的；一者，部分腐败是一种潜势的资源积累形成过程、或成为机构重建乃至朝代变革的加速助力；再者，在某一时间某一层次确认的腐败，在另一时间另一层次衡量只是一正常过程，甚至是上信下拥、左右互济、高迈通达的正面典范表征。

其中特别地，诸如国家大部分经济学领域中的动态平衡控制及趋势预测计算问题可由一些数学家及物理学家顺道解决，且较之为资本利益集团服务呐喊的大部分墙头草型经济学家，可能更具有普世良知及道义准则。

本质上，凡人的生命所依赖的周期性呼吸、饮食、睡眠等，趋向获得更多财富的热切、登临更高权位的豪迈、发现更普适规律的兴奋等，乃至生老病死六道轮转不歇，皆与吸食某种毒品成瘾状况类同或相当，差别仅在于犯瘾周期长短、犯瘾及满足时身心状态反应剧烈程度各具相应特征。

广义上，所谓的文明具有线性的理想可逆渐变累积沉淀特征，而革命则具有非线性的开散不可逆剧变翻新重构性质；在诸层面文明与革命互为内核及潜势，转化递续。

世 迹 春雨润泽漫江河，秋野林木疏霜叶；浮沉荣枯随风远，藜杖天涯吟梵歌。

幻 戏 大道无形影缤纷，小术示欲摄众人；慧隐闲棋不著迹，智显妙手解乾坤。

无 住 人生春秋几许日，祖师帝王苦差事；千古功业如朝露，清风依故盈莲池。

示 现 开局一支笔，终局一杯茶；浮世幻朝暮，大千若空花。

1.2.13.4 多重幻影

在大略层面，科学只是探索台阶，宗教只是意愿指向，人生只是体验过程，家庭只是因缘契约，社会只是门阀罗网，国家只是强者江湖，世界只是业力幻相。

当权力掌管及分配一切资源指点江山时，则一切都将围着权力运转，整体周期性地渐趋僵死及迈向固化成为其标志特征。

这其中，由普通平民或一般官吏家庭上去的官员比由从官宦世家大族出去的官员，前者一般会由统治集团遴选安排进入预定岗位变换轨迹，并将其适机置放在前台作为政治模特以示政界清明朝野通畅，但其毕竟根基浅、底子薄、背负重，表面光艳实则压力巨大、步履艰难，应对官场明暗规则的智慧技巧缺失，手中更没有颠覆性力量的底牌，又无攀附门径成为世家门阀的代言人，是故几乎难以融入权力运转的核心决策圈，多时卑微拘谨徘徊沮丧困惑无依，尤其是在清楚确定自己仅是权力舞台上的政治玩偶及人形道具的终极角色身份后，部分地逐渐放下了先前的清越理想，在贪腐及越界方面的可能性更大，被曝光处理的可能性也更高。

前者基本是属于整体原始积累上升型的，一般没有特别的根基和过硬的关系，更没有在政治舞台上进行高难度动作时的安全保护措施，在复杂迷幻的官场既需要强力适时自补又需要谨慎探路铺垫；而后者完全是属于稳态维护或改良提升型的，一般都祖荫庇底蕴深厚乃至通天，根基坚实资源丰沛；这使得前者或主动选择平庸或自我消沉以明哲保身，或虽锐意进取成为精英但在大的诱惑面前容易铤而走险被拿住把柄或选择主动自污授人以柄以示站队表忠顺服，其被统治集团按预设安排推出处理时也即成为反腐宣传的急功近利重墨典型及派系斗争的边缘牺牲品；而后者一般谙熟官场表里游戏规则及高层布局意图，从容淡迹闲适自如，不会为平常的诱惑作出越格的明确选择，即使偶尔出问题纰漏或受到相关设局牵连，也基本都会在幕后通过权力置换或资源割让等交易抹平事件，甚至还会成为家族扩展纵横联盟及个人稳健迁升的担当契机，这类面对诱惑的选择及转化危机成为机遇的能力正是社会不同阶层的分野标志。

前者精英壮烈地陨落，成为统治集团权力运转的养料耗材和表层祭品；而后者则沿袭大族传承成为抚弄权阶的跃迁玩家，部分进而成为几股世家势力的平衡博弈代表，接班参与甚至主导国家权力运转剧本的编写和修订，最终后者代表自主不自主地融入数层帷幕后面的多重幻影之中，完成对权力运转的内在献祭。

前者精英主要以个人的奋斗拼搏为底色，无奈成为权力运转的表层祭品实有不甘，一路走来充满理想朝向光明跋涉攀登，却成功扮饰了类似江湖组织预先编妥的立威树信戏剧里的负面角色；而后者代表则以几股世家的平衡势力为依托，默认完成对权力运转的内在献祭几乎虔诚自愿，悄然而剧烈，具有显著的隐秘宗教仪轨特征。

此数层帷幕后面的多重幻影，是由娑婆一切有情众生贪嗔痴慢疑共业的部分投影复合而成，在有情众生我法二执的感召中显现；其因贪欲故增广我及我所，因执痴故无明而认我恒常，因猜疑故多虑而隐显不定，因恐惧故不肯合一凝形；其虽为多重幻影，却参与牵引娑婆一切有情众生流转浮沉；这使得无论是赞叹投入、或是淡漠疏离、或是诅咒抗拒权力，都是在直接稳固加强、或是间接默许放任、或是变相迭代加强权力运转体系。

在此多重幻影的层面上，世间没有改朝换代，只有接班统治者；没有权力真空期，只有权柄的明暗转移交接；所谓政权的动荡或过渡，也只是权力运转体系的开放性迭代优化调整。

因多重幻影故，历来统治集团基本都以贪欲、猜忌及恐惧等为驱动内核，都会不定期地利用危机乃至制造适度的危机，来消耗磨损但又不会完全消除异己势力，威胁拉拢中间观望派，更新并培植淬炼嫡系力量；通过操纵并转化危机，提升统治权威，加固权力运转体系。

对于帝王及统治核心阶层，法律及标准更多时是用来治世过程动态参考的，所谓的真相往往是展示训导的趋势性表象，适机组织号令民众及治吏统人教化是世间王道。

由腐败者管理腐败者，其中掺杂配比若干阶段性清廉者予以适当制衡，亦是相对稳定协调的组织架构；许多时许多事，过度腐败与过度清廉皆偏离为官之道且易误事乃至误国；整治腐败如同医病，针砭积弊辨证施药，君臣佐使配伍生克，调和阴阳中正有度。支持一定程度的、非目的性的清廉，包容一定限度的、可控制的污腐，适度保留一部分异己势力以作开明标记同时亦便于查验中间派别的集聚动向，个人功过分期分段分事定性，整体联合适时适度平衡演进，重大成轻小节，看趋势略细末，在系列的相变中把握中间演变过程，隐忍待机沉稳破局，派系外造势引导协作，派系内融合转化纷争，奇正联动虚实结合，宽厚冷峻深隐谋略，在帝位稳固及传承稳健的前提下以尽量增强国力为主线并适当兼顾社会底层民众生计提高福祉持续加固执政根基，乃其关窍所在和运作极致，是东方古老智慧的构成及衍生部分，亦为帝王治世之道及驭驱臣民之术。

特权阶层弥天贪腐的隐约泄漏，思想家极致理想的新锐阐述，诸类等等，在统治者的视觉中，就如同田园角落里次第绽放的花朵，艳丽夺目引人惊叹，而其中的主要花枝则往往是上层派别博弈过程有意让民众看到的边末部分，统治者只需从容待时采收整体平衡转化即可。

等级尊严及无尽贪欲是凡尘世界的标志，真正的公平及尊严在世俗构架中是找不到的；即使新生力量初衷是想奋斗拼搏出一天下平等大同的理想社会，但还是会归计于私家几个，然后再进入建制化腐败及下一波新生力量崛起抗争的周期。

极端情况下，绝对极致地追求公平及自由会使国家在阶段性中兴之后整体凝聚力下降，在国内外相关势力的联合作用下而导致迅速衰弱或解体。

朴素地，只需粗略想想凡人身心组织构造、功能协调分工及生老病死轮转，就清楚了；世俗世界基本就是若干凡人身心的放大版本。

在大略功能区域划分上，其中统治集团为首脑及部分五官等，各中枢协调运转机构同于脏腑、部分五官、部分经络系统及神经系统等，武装力量及安全部门类于骨架肌肉及关节肢体等，高中级地方政府机构等同于胸腰附近至膝盖支撑区域等，基层官吏、一般官兵及普通民众则等效为小腿至脚底板支撑区域等。

进一步地，居于同一星球的各个国家之间的关系，乃至星系中诸星球之间的关系等等，亦复如是。这仅是偏于主要功能并有重叠性的类比，而不是严格意义上的阶层划分与论断。

娑婆世界，变幻莫定；强者为尊，此消彼长；生灭伴生，成住异灭；前赴后继，周而复始；因果循环，无有尽期；苦楚困顿，因我我所；若志离苦，觉悟证果；宿业冤亲，随顺解脱。

简学或维学纲要框架，作为研究自然现象演化规律的规律，包括演化规律的展开与规律的凝聚，原理或定律与伴生悖论间的和合与转化等，融通自然科学及人文科学并直接面向智慧台阶是其基本特征。

离相 尘中尘，梦里梦，烦恼欢愉本清净；累劫轮转将出离，我念寂灭化无生。

怀古 江山苍茫壮阔，宛约渺渺游兵戈，虚华家国；分合乱灭幕启幕落，鼓角阵阵旌旗猎。

移星转斗展谋略，引时造势图霸业；车马如潮漫城郭，焦土翻新透血色。

欢声动，风云迫；帝王改名高登场，轻顾天下皆在我；尊崇归私又几家，豪纵骄奢。

殿阁丝音萦皎月，晓露凝玉阶；窗前低头嘱离别，一别烟雨绝。

昨日上座数历祖，宏论激朝野；明晚简素淡然去，溪畔兰苑，续说遗策。

古往今来未曾变，丛林强者定法则；平民负重讨活路，总徘徊在生死边界。

牵绊娑婆，追流逐沫，春秋道场荣枯客；迷幻浮沉难尽际，人生究竟当向何？

复层梦里，观花暂歇，心开无住无所得；我法二执渐消解，离相刹那出苦乐。

1.2.14 稳定核素趋势分布方程与数据处理分析方法及其拟合方程的选择原则

以简学或维学的纲要框架考察, 相关规律之间融合或内嵌耦合, 新的形式将具有相关规律的复合性质。一般地, 自然现象演化过程阶段性地在趋势上或具有饱和性、或具有蠕变性, 部分曲线段或整段曲线还往往包含着波动的特征。

由稳定核素中子数 N 与质子数 (原子序数) Z 之间的实验数据, 将中子数 N 与质子数 Z 平滑等效为渐变连续参量, 有一简洁的趋势性方程及其一周期性解 $N(Z)$ 形式^[1]

$$\frac{dN}{dZ} + \sigma_{01}N^2 + \sigma_{02} = 0, \quad N(Z=1)=0 \quad (1.134)$$

$$N = 192 \tan[0.007(Z-1)]; \quad (1.135)$$

式中 σ_{01} 、 σ_{02} 为待定常量, 其由对实验数据的拟合确定; 一组值为 $\sigma_{01} = -3.646 \times 10^{-5}$, $\sigma_{02} = -1.344$ 。

方程 (1.135) 式曲线及与实验数据对比结果如图 1-6 所示。

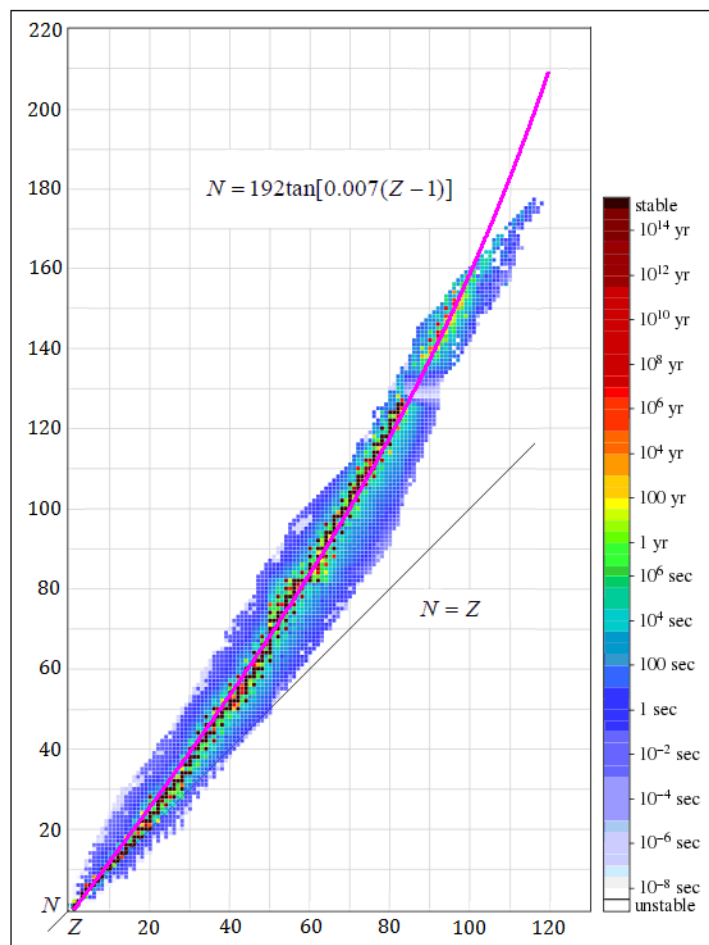


图 1-6 趋势方程 $N(Z)$ 曲线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图

■ 稳定核素数据点 (from website of nndc.bnl.gov or en.wikipedia.org)

— 趋势方程曲线 (from website of nature.ac.cn)

Fig. 1-6 Comparison result figure between the curve of tendency equation $N(Z)$ and the experimental distribution data points of the stable nuclides

■ point of stable nuclide data (from website of nndc.bnl.gov or en.wikipedia.org)

— curve of tendency equation (from website of nature.ac.cn)

根据方程 (1.135) 式, 得可能存在的包括目前化学元素周期表及核素分布在内的各大周期质子数 Z 的起始值 $Z_{j\text{Start}}$ 、终止值 $Z_{j\text{End}}$ 分别为

$$Z_{j\text{Start}} = 143(j-1)\pi + 1, \quad (1.136)$$

$$Z_{j\text{End}} = 143(j-0.5)\pi + 1; \quad (1.137)$$

式中 j 为自然数, $j \geq 1$ 。

依据方程 (1.136) 式、(1.137) 式, 可得在第一大周期质子数起始值 $Z_{1\text{Start}}$ 与终止值 $Z_{1\text{End}}$ 分别为

$$Z_{1\text{Start}} = 143(1-1)\pi + 1 = 1, \quad (1.138)$$

$$Z_{1\text{End}} = 143(1-0.5)\pi + 1 \approx 225. \quad (1.139)$$

根据方程 (1.135) 式, 可得以中子数 N 表示质子数 Z 的周期性饱和方程 $Z(N)$ 形式为

$$Z = 1 + 143\arctan[0.0052N]. \quad (1.140)$$

方程 (1.140) 式曲线及与实验数据对比结果如图 1-7 所示。

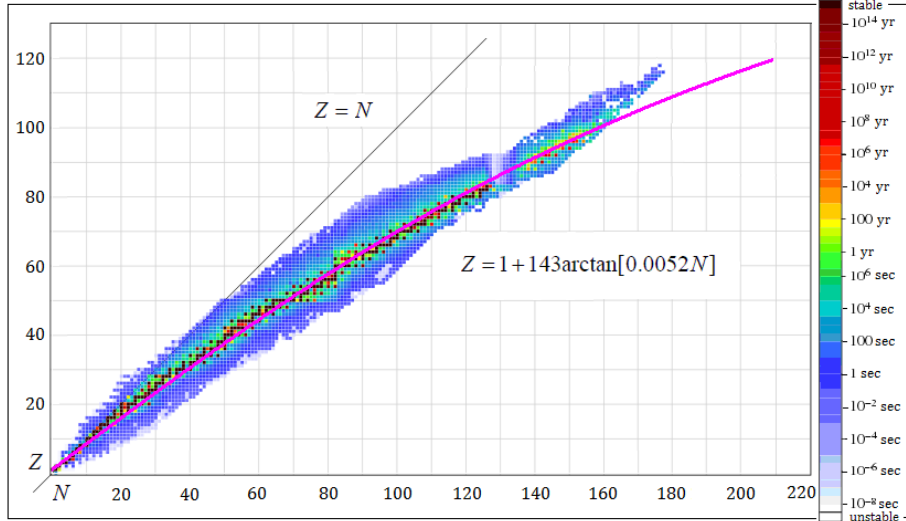


图 1-7 趋势方程 $Z(N)$ 曲线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图

■ 稳定核素数据点 — 趋势方程曲线

Fig.1-7 Comparison result figure between the curve of tendency equation $Z(N)$ and the experimental distribution data points of the stable nuclides

■ point of stable nuclide data — curve of tendency equation

在图 1-7 中, 由趋势方程 $Z(N)$ 曲线与核素数据点, 可见稳定核素于 $Z \approx 50 \sim 60$ 段出现一转折区间, 此转折区域特征还需进一步深入研究。

图 1-7 表明稳定核素质子数 Z 与中子数 N 之间的 $Z(N)$ 趋势关系具有近似的等效饱和性质, 故其亦可由下面饱和性趋势方程及其一双曲正切函数解形式进行趋势拟合探讨分析

$$\frac{dZ}{dN} + \rho_{01}(Z-1)^2 + \rho_{02} = 0, \quad Z(N=0)=1, \quad \rho_{01}\rho_{02} < 0 \quad (1.141)$$

$$Z = 1 + \sqrt{-\rho_{01}^{-1}\rho_{02}} \tanh[\sqrt{-\rho_{01}\rho_{02}} N]; \quad (1.142)$$

这里 ρ_{01} 及 ρ_{02} 为依据实验数据确定的待定常量, 其一参考性的近似取值区间为 $\rho_{01} \approx 2.8 \times 10^{-5} \sim 3.7 \times 10^{-5}$ 、 $\rho_{02} \approx -0.76 \sim -0.65$; 如直接参考方程 (1.134) 式, 因 $Z(N=0)=1$, 则 ρ_{02} 可取为 $\rho_{02} = \sigma_{02}^{-1} = -1.344^{-1} \approx -0.744$ 。

根据方程 (1.142) 式及稳定核素数据分布特征, 可得在 $0.0052 \geq \sqrt{-\rho_{01}\rho_{02}} \geq 0.0044$ 区间系列 $Z(N)$ 趋势方程中的二个具体近似形式为

$$Z = 1 + 161 \tanh[0.0045N]; \quad (1.143)$$

$$Z = 1 + 151 \tanh[0.0050N]. \quad (1.144)$$

方程 (1.143) 式、(1.144) 式、(1.145) 式所对应的稳定核素的质子数极限值分别为

$$Z_{(161, 0.0045)\text{max}} = 162; \quad (1.145)$$

$$Z_{(151, 0.0050)\text{max}} = 152. \quad (1.146)$$

方程 (1.143) 式、(1.144) 式与方程 (1.135) 式的曲线与实验数据对比结果如图 1-8 所示。

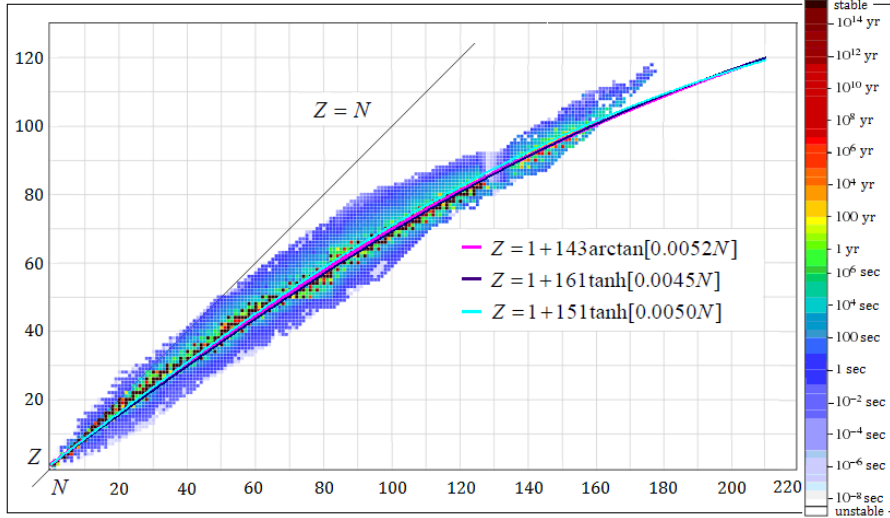


图 1-8 趋势方程 $Z(N)$ 曲线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图

■ 稳定核素数据点

Fig.1-8 Comparison result figure between the curve of tendency equations $Z(N)$ and the experimental distribution data points of the stable nuclides

■ point of stable nuclide data

由方程 (1.134) 式、(1.141) 式得稳定核素中子数 N 与质子数 Z 之间的近似平衡式

$$[\sigma_{01}N^2 + \sigma_{02}][\rho_{01}(Z-1)^2 + \rho_{02}] = 1, \quad N(Z=1)=0 \quad (1.147)$$

因 $N(Z=1)=0$, 故有 $\rho_{02} = \sigma_{02}^{-1}$, 即解得一 $Z(N)$ 趋势方程形式为

$$Z = 1 + \sqrt{\rho_{01}^{-1}[(\sigma_{01}N^2 + \sigma_{02})^{-1} - \sigma_{02}^{-1}]}, \quad Z(N=0)=1. \quad (1.148)$$

依据实验数据特征, 其中在 $\rho_{01} \approx 3.28 \times 10^{-5}$ 时, $Z_{\max} = 1 + \sqrt{-(\rho_{01}\sigma_{02})^{-1}} \approx 152$; 于此参数情况下方程 (1.148) 式与方程 (1.135) 式的曲线与实验数据对比结果如图 1-9 所示。

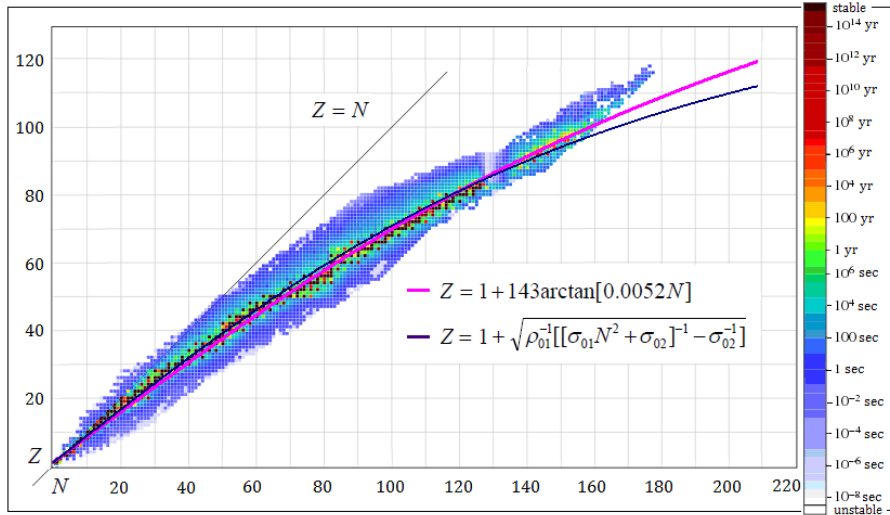


图 1-9 趋势方程 $Z(N)$ 曲线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图

■ 稳定核素数据点

Fig.1-9 Comparison result figure between the curve of tendency equations $Z(N)$ and the experimental distribution data points of the stable nuclides

■ point of stable nuclide data

作为广泛的探讨分析, 将方程 (1.142) 式进行扩展为 (1.19) 式的简单形式

$$Z = 1 + \sqrt{-\rho_{01}^{-1}\rho_{02}} \frac{\exp[\sqrt{-\rho_{01}\rho_{02}}N] - \exp[-(\sqrt{-\rho_{01}\rho_{02}} + \lambda_{00})N]}{2 \cosh[\sqrt{-\rho_{01}\rho_{02}}N]}, \quad (1.149)$$

这里 λ_{00} 为待定常量; 依据实验数据特征可得一组曲线拟合常量为 $\rho_{01} \approx 2.98 \times 10^{-5}$ 、 $\rho_{02} \approx -0.68$ 、 $\lambda_{00} = 0.0013$; $Z_{\max} = 1 + \sqrt{-\rho_{01}^{-1}\rho_{02}} \approx 152$ 。

方程 (1.149) 式与方程 (1.135) 式的曲线与实验数据对比结果如图 1-10 所示。

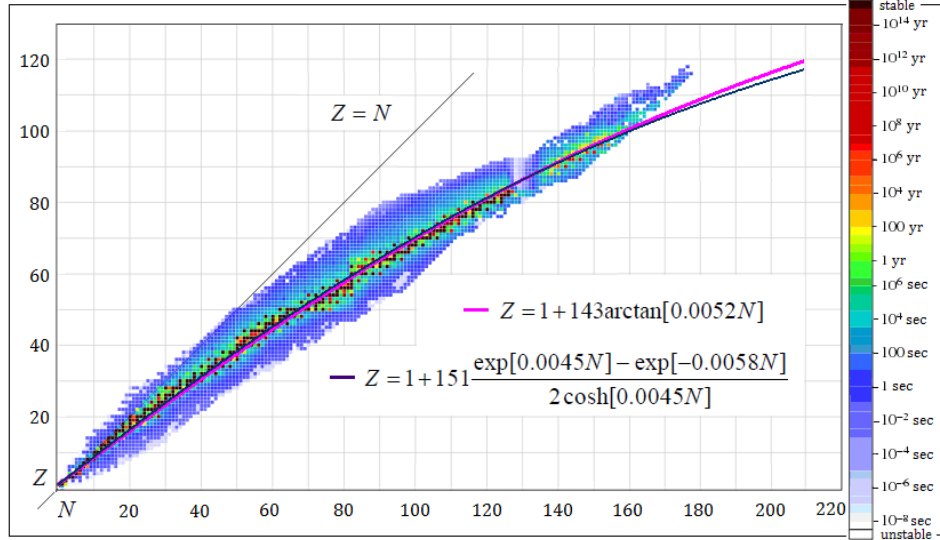


图 1-10 趋势方程 $Z(N)$ 曲线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图

■ 稳定核素数据点

Fig.1-10 Comparison result figure between the curve of tendency equations $Z(N)$ and the experimental distribution data points of the stable nuclides

■ point of stable nuclide data

上述分析进一步表明，局部的数据曲线拟合可由长程或远景极限差异较大的诸多方程予以近于重叠的趋势拟合，这是数据拟合分析方法所固有的中短程优势与长程局限性；其中选择的原则一是所得出的方程形式应具有向机理解析的动力学基础方程进一步接近的内秉特征，二是能够与其它原理性方程通联及联立，三是能够进行较为可靠的趋势预测及计算分析。

1.2.15 稳定核素比结合能方程及结合能最大位置

对于数据曲线阶段性带有波动特征的饱和过程或蠕变过程，依据方程 (1.19) 式，可得波动扩展拟合的简略方程形式为

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x - x_0)] - \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x - x_0)]} b_w, \quad (1.150)$$

式中 A 、 x_0 、 y_0 、 α_1 、 α_2 、 α_3 为待定常量， $y(x = x_0) = y_0$ ， b_w 为波动扩展函数；根据数据波动情况， b_w 有多种函数形式，其双边波动扩展时的一简单形式为

$$b_w = 1 + b_{w0} \exp[-\gamma_w(x - x_0)] \cos[2\pi f_w(x - x_{w0})]; \quad (1.151)$$

单边波动扩展时的一简单形式为

$$b_w = 1 + b_{w0} \exp[-\gamma_w(x - x_0)] \cos^2[\pi f_w(x - x_{w0})]; \quad (1.152)$$

这里 b_{w0} 为波动扩展系数， γ_w 、 x_{w0} 为待定常量； f_w 为数据波动频率， $f_w = T_w^{-1}$ ， T_w 为数据波动周期。

特别地，依据 (1.150) 式及 (1.152) 式，当取 $T_w = 4$ ， $f_w = T_w^{-1} = 0.25$ ， $b_{w0} = 1$ ， $x_{w0} = 0$ 时，可直接给出稳定核素比结合能或平均结合能 ε_N (MeV) 与核子数 A_N 之间关系的单边扩展趋势方程

$$\varepsilon_N = b_0 \frac{\exp[\alpha_{01}(A_N - 1)] - \exp[-\alpha_{02}(A_N - 1)]}{2b_A \cosh[\alpha_{03}(A_N - 1)]} [1 + \exp[-\gamma_w(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)], \quad (1.153)$$

这里 b_0 、 α_{01} 、 α_{02} 、 α_{03} 、 γ_w 为待定常量， b_A 为趋势比函数。

由比结合能方程 (1.153) 式，即得稳定核素结合能 E_N (MeV) 方程为

$$\begin{aligned} E_N &= A_N \varepsilon_N \\ &= b_0 A_N \frac{\exp[\alpha_{01}(A_N - 1)] - \exp[-\alpha_{02}(A_N - 1)]}{2b_A \cosh[\alpha_{03}(A_N - 1)]} [1 + \exp[-\gamma_w(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)]. \end{aligned} \quad (1.154)$$

方程 (1.153) 式及 (1.154) 式是开放性方程，并行于目前由 Weizsäcker 液滴能 (含体能、表面能、Coulomb 能、对称能、奇偶能)、Strutinsky 壳修正能、残余修正能等相关项构建的方程形式描述，属于唯象方法；方程中待定常量 b_0 、 α_{01} 、 α_{02} 、 α_{03} 、 γ_w 可以有多组取值，

其中简单地当 $b_0 = 9.35 \text{ MeV}$ 、 $\alpha_{01} = 0.0398$ 、 $\alpha_{02} = 0.54$ 、 $\alpha_{03} = 0.04071$ 、 $\gamma_w = 0.15$ 时，即得方程 (1.153) 式、(1.154) 式在取 $b_A = 1$ 情况下的具体形式分别为

$$\varepsilon_N = 9.35 \frac{\exp[0.0398(A_N - 1)] - \exp[-0.54(A_N - 1)]}{2 \cosh[0.04071(A_N - 1)]} [1 + \exp[-0.15(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)]; \quad (1.155)$$

$$E_N = 9.35 A_N \frac{\exp[0.0398(A_N - 1)] - \exp[-0.54(A_N - 1)]}{2 \cosh[0.04071(A_N - 1)]} [1 + \exp[-0.15(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)]. \quad (1.156)$$

核素比结合能方程 (1.155) 式核子数 A_N 从 1 到 90 的局部曲线如图 1-11 所示； A_N 从 1 到 275 的曲线如图 1-12 所示，方程与数据间的相对误差为 0.9754。

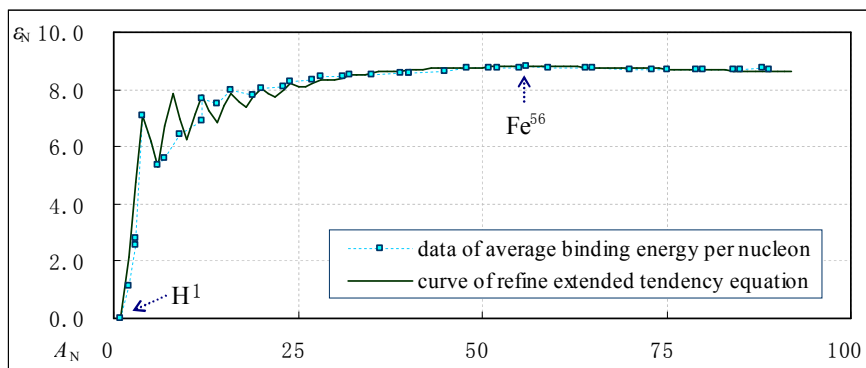


图 1-11 稳定核素比结合能单边细化拓展趋势方程局部曲线图

Fig. 1-11 Local curve figure of the unilateral refinement extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

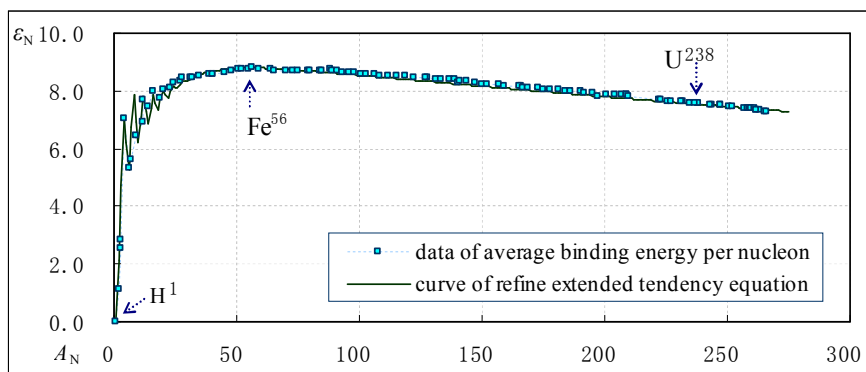


图 1-12 稳定核素比结合能单边细化拓展趋势方程曲线图

Fig. 1-12 Curve figure of the unilateral refinement extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

核素结合能方程 (1.156) 式核子数 A_N 从 1 到 275 的曲线如图 1-13 所示，方程与数据之间的相对误差为 0.9999； A_N 从 1 到 1390 的远景曲线及结合能理论最大值 $E_{N_{\text{tmax}}}$ 位置如图 1-14 所示。

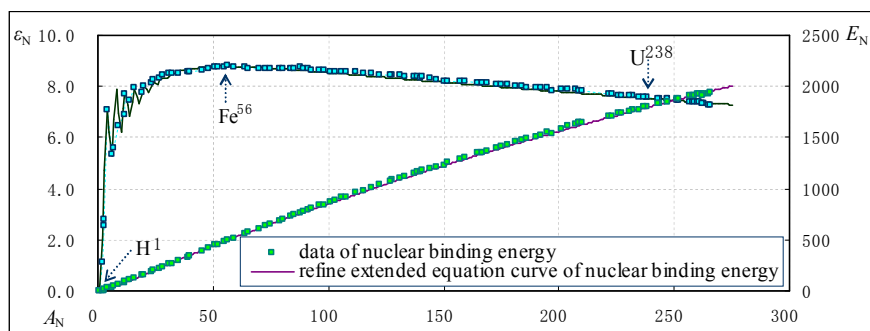


图 1-13 稳定核素结合能单边细化扩展趋势方程曲线图

Fig. 1-13 Curve figure of unilateral refinement extended tendency equation of stable nuclear binding energy

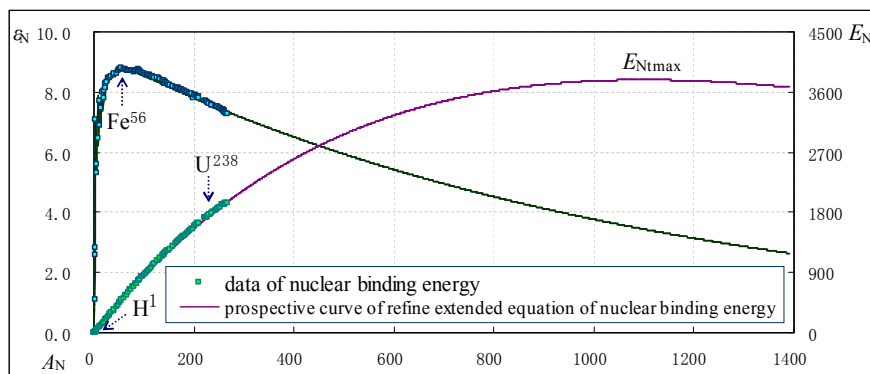


图 1-14 核素结合能扩展趋势方程远景曲线及其理论最大值位置图

Fig. 1-14 Prospective curve and its theoretical maximum position figure of unilateral extended tendency equation of the nuclear binding energy

当待定常量 b_0 、 α_{01} 、 α_{02} 、 α_{03} 、 γ_w 分别取 $b_0 = 9.34 \text{ MeV}$ 、 $\alpha_{01} = 0.041$ 、 $\alpha_{02} = 0.52$ 、 $\alpha_{03} = 0.04191$ 、 $\gamma_w = 0.15$ 时；则方程 (1.153) 式、(1.154) 式在 $b_A = 1$ 情况下的另二具体形式为

$$\varepsilon_N = 9.34 \frac{\exp[0.041(A_N - 1)] - \exp[-0.52(A_N - 1)]}{2 \cosh[0.04191(A_N - 1)]} [1 + \exp[-0.15(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)] ; \quad (1.157)$$

$$E_N = 9.34 A_N \frac{\exp[0.041(A_N - 1)] - \exp[-0.52(A_N - 1)]}{2 \cosh[0.04191(A_N - 1)]} [1 + \exp[-0.15(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)] . \quad (1.158)$$

核素比结合能方程 (1.157) 式核子数 A_N 从 1 到 90 的局部曲线如图 1-15 所示； A_N 从 1 到 275 的曲线如图 1-16 所示，方程与数据间的相对误差为 0.9763。

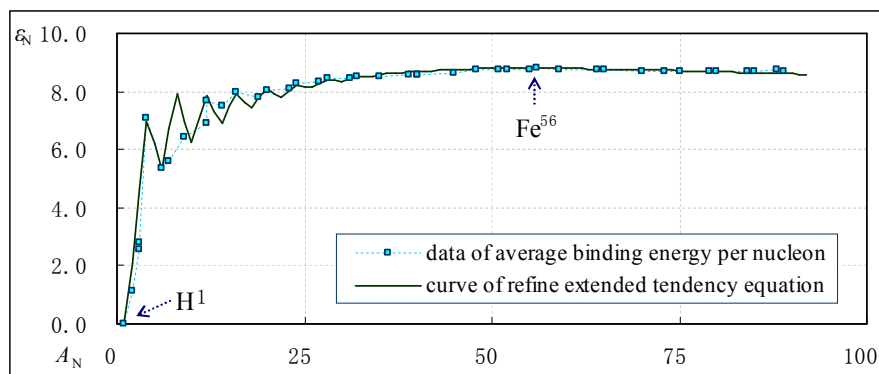


图 1-15 稳定核素比结合能单边细化拓展趋势方程局部曲线图

Fig. 1-15 Local curve figure of the unilateral refinement extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

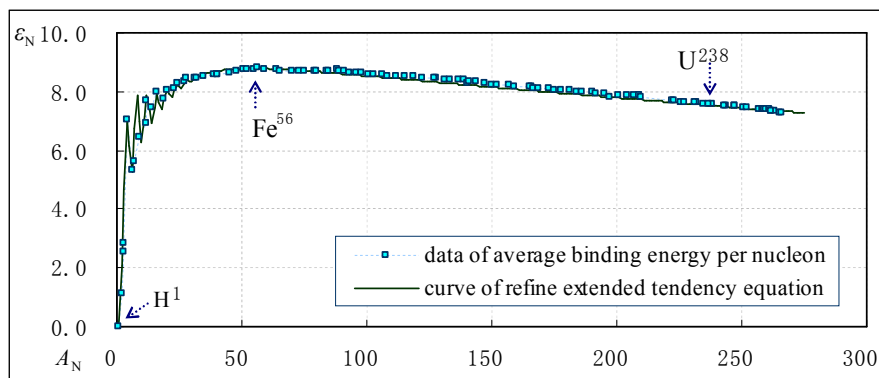


图 1-16 稳定核素比结合能单边细化拓展趋势方程曲线图

Fig. 1-16 Curve figure of the unilateral refinement extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

核素结合能方程 (1.158) 式 A_N 从 1 到 275 的曲线如图 1-17 所示, 方程与数据之间的相对误差为 0.9999; A_N 从 1 到 1390 的远景曲线及结合能理论最大值 E_{Ntmax} 位置如图 1-18 所示; 方程 (1.157) 式及 (1.158) 式的计算结果与方程 (1.155) 式及 (1.156) 式分别相近。

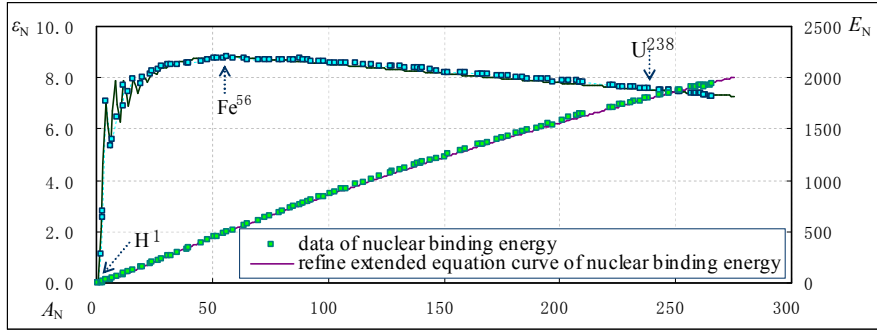


图 1-17 稳定核素结合能单边细化扩展趋势方程曲线图

Fig. 1-17 Curve figure of unilateral refinement extended tendency equation of stable nuclear binding energy

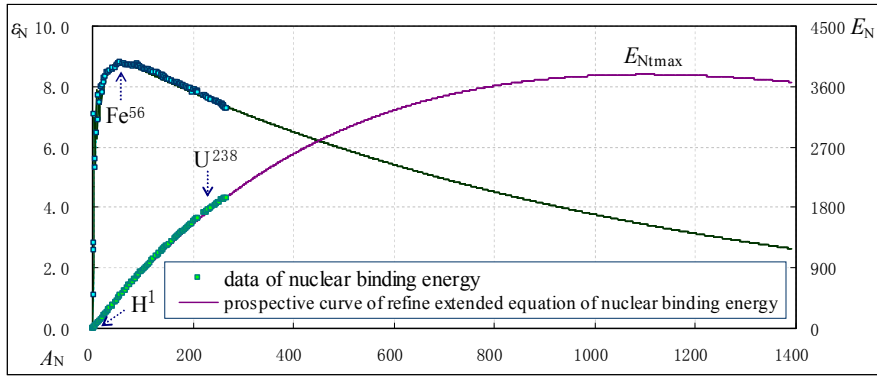


图 1-18 核素结合能扩展趋势方程远景曲线及其理论最大值位置图

Fig. 1-18 Prospective curve and its theoretical maximum position figure of unilateral extended tendency equation of the nuclear binding energy

上述分析是在方程 (1.153) 式中在趋势比函数取 $b_A = 1$ 情况下给出的结果, 其核素结合能呈现最大值后随即逐渐减少, 这与目前的物理学理论传统观念有所不同。

下面给出方程 (1.153) 式中在趋势比函数取 $b_A \neq 1$ 情况下的极限饱和和分析途径。

最为简单地, 当趋势比函数 b_A 为

$$b_A = b_{A0} A_N + 1 \quad (1.159)$$

时, 方程 (1.153) 式及 (1.154) 式分别成为

$$\varepsilon_N = b_0 \frac{\exp[\alpha_{01}(A_N - 1)] - \exp[-\alpha_{02}(A_N - 1)]}{2(b_{A0} A_N + 1) \cosh[\alpha_{03}(A_N - 1)]} [1 + \exp[-\gamma_w(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)]; \quad (1.160)$$

$$E_N = b_0 A_N \frac{\exp[\alpha_{01}(A_N - 1)] - \exp[-\alpha_{02}(A_N - 1)]}{2(b_{A0} A_N + 1) \cosh[\alpha_{03}(A_N - 1)]} [1 + \exp[-\gamma_w(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)]; \quad (1.161)$$

这里 b_{A0} 为待定系数。

由方程 (1.160) 式及 (1.161) 式, 参考方程 (1.157) 式中的参数, 可得稳定核素比结合能方程及结合能方程的具体形式及其区域性近似方程分别为

$$\varepsilon_N = 9.34 \frac{\exp[0.041(A_N - 1)] - \exp[-0.52(A_N - 1)]}{2(0.001A_N + 1) \cosh[0.041(A_N - 1)]} [1 + \exp[-0.15(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)]; \quad (1.162)$$

$$E_N = 9.34 A_N \frac{\exp[0.041(A_N - 1)] - \exp[-0.52(A_N - 1)]}{2(0.001A_N + 1) \cosh[0.041(A_N - 1)]} [1 + \exp[-0.15(A_N - 1)] \cos^2(0.25\pi A_N)]. \quad (1.163)$$

$$\varepsilon_N(A_N > 60) \approx \frac{9.34}{0.001A_N + 1}; \quad (1.164)$$

$$E_N(A_N > 60) \approx \frac{9.34 A_N}{0.001A_N + 1}. \quad (1.165)$$

核素比结合能方程 (1.162) 式核子数 A_N 从 1 到 90 的局部曲线如图 1-19 所示; A_N 从 1 到 275 的曲线如图 1-20 所示, 方程与数据间的相对误差为 0.9771。

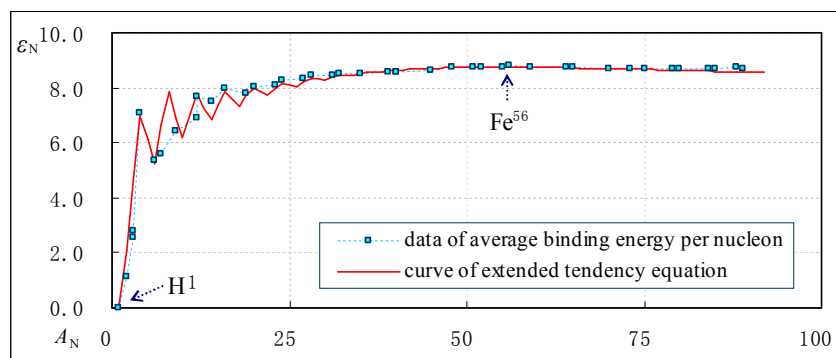


图 1-19 稳定核素比结合能单边细化拓展趋势方程局部曲线图 ($b_A \neq 1$)

Fig. 1-19 Local curve figure of the unilateral refinement extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide (when $b_A \neq 1$)

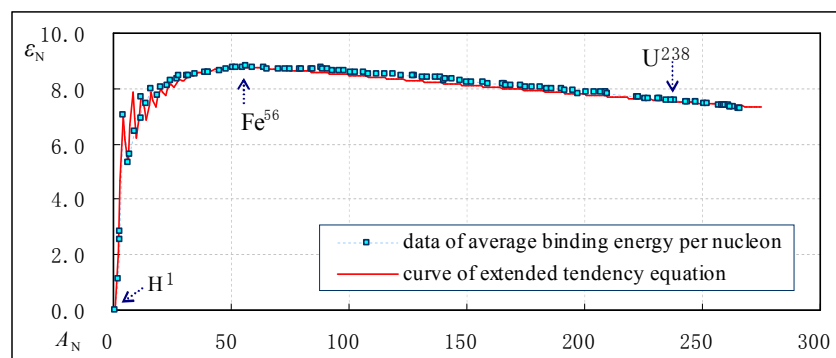


图 1-20 稳定核素比结合能单边细化拓展趋势方程曲线图 ($b_A \neq 1$)

Fig. 1-20 Curve figure of the unilateral refinement extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide (when $b_A \neq 1$)

核素结合能方程 (1.163) 式 A_N 从 1 到 275 的曲线如图 1-21 所示, 方程与数据间的相对误差为 0.9998; 远景曲线如图 1-22、图 1-23 所示。

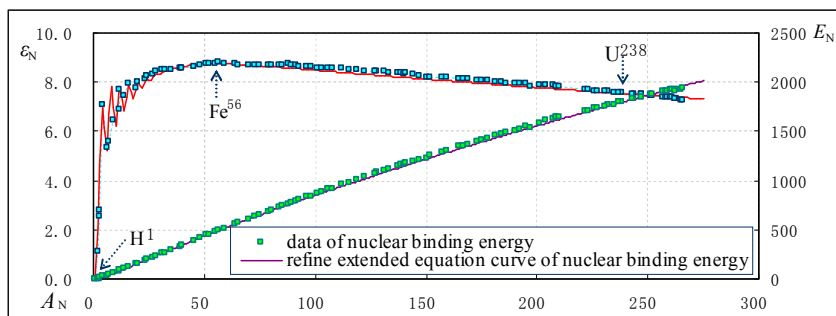


图 1-21 稳定核素结合能单边细化扩展趋势方程曲线图 ($b_A \neq 1$)

Fig. 1-21 Curve figure of unilateral refinement extended tendency equation of stable nuclear binding energy (when $b_A \neq 1$)

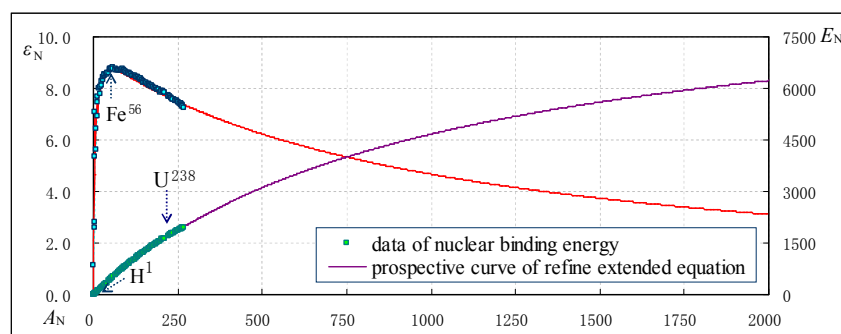


图 1-22 核素结合能扩展趋势方程远景曲线图 ($b_A \neq 1$, $1 \leq A_N \leq 2000$)

Fig. 1-22 Prospective curve figure of unilateral extended tendency equation of the nuclear binding energy (when $b_A \neq 1$ and $1 \leq A_N \leq 2000$)

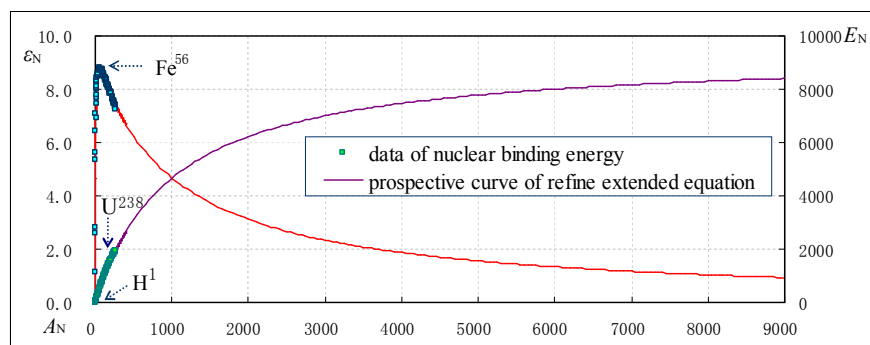


图 1-23 核素结合能扩展趋势方程远景曲线图 ($b_A \neq 1$, $1 \leq A_N \leq 9000$)

Fig. 1-23 Prospective curve figure of unilateral extended tendency equation of the nuclear binding energy (when $b_A \neq 1$ and $1 \leq A_N \leq 9000$)

这里稳定核素比结合能方程及结合能方程形式与稳定核素数据曲线来自参考资料 1。

目前由 Weizsäcker 液滴能、Strutinsky 壳修正能、残余修正能等相关项构建的核素结合能（等效质量）方程，是基于唯象构架的分项局部解析延展形式，紧密地与相关基本理论描述项结合，其有五个以上待定系数，基于对核素相关实验数据的方程拟合确定，属于半唯象半解析形式，随着实验数据的增加，方程修正补充或叠加延展较为灵活，核素计算较为广泛。

与之相比较，关于稳定核素计算的趋势分析方法，其比结合能方程（1.153）式及结合能方程（1.138）式基本属于全唯象构造形式，比结合能方程及结合能方程在趋势上与稳定核素实验数据基本符合的同时，亦具有简洁可解的极限特征，其中方程（1.160）式～（1.165）式较为符合物理学理论的主线脉络思想；该方法的缺点是，因待定常量 b_0 、 α_{01} 、 α_{02} 、 α_{03} 、 γ_w 的不同取值，及趋势比函数 b_A 取不同形式，在核子数 A_N 从 1 到 275 区间基本符合的同时，于远景结合能理论最大值 $E_{N_{\text{tmax}}}$ 及其位置方面却可能存在着较大差别，这是仅基于数据曲线特征建立趋势性方程而缺少解析构造所致，还有显著不足之处是未能对广泛的核素予以解析层面的描述。

对于此趋势分析方法，一个深入研究方向是，稳定核素中子数 N 与质子数（原子序数） Z 的趋势性关系方程（1.150）、比结合能方程（1.153）式及结合能方程（1.154）式在趋势上具有共同的解析基础方程，可进行广泛的核素计算，而稳定核素分布方程（1.150）、比结合能方程（1.153）式及结合能方程（1.154）式等，仅为其简化导出形式或趋势性近似解。

根本上，纯粹解析是困难的；在目前阶段乃至未来一段时期，解析需要以唯象构造作为基础，唯象构造通过解析进行局部拓展；唯象构造是核心，解析计算是延展连接及应用环节，通过解析计算再不断更新拓展唯象构造。

1.2.16 太阳系元素丰度的简略趋势性方程

在天体物理学领域，宇宙元素丰度数据分析是其中的一个重要方向，对深入理解宇宙元素的起源、演化及发布具有显著意义；一般地，数据是动态的，需要根据数据的不断补充修正持续分析；在忽略部分细节差异的情况下，可将太阳系元素丰度近似等效于宇宙元素丰度。

下面讨论太阳系元素丰度数据的趋势性方程表述，其中方程形式及数据曲线特征来自参考资料 1。

对于太阳系元素丰度，取 $A_{\text{selog}} = \log_{10} A_{\text{se}}$ ， A_{se} (atoms/ 10^6 atoms Si) 为太阳系元素丰度， $A_{\text{selog}}(\text{Si}^{28}) = 6$ ；其中元素氢的原子数量占比约为 90.98%，核子数量占比约为 70.57%；由单边波动扩展方程（1.152）式，可初步得 A_{selog} 与元素原子核质量数（核子数） A_N 的一般性趋势方程形式为

$$A_{\text{selog}} = [p_0 \frac{\exp[\beta_{01}(A_N - A_{N0})] - \exp[-\beta_{02}(A_N - A_{N0})]}{2 \cosh[\beta_{03}(A_N - A_{N0})]} - p_1] \times [1 + p_{w0} \exp(-\gamma_{Aw} A_N) \cos^2[\pi f_{Aw}(A_N - A_{N1})]] + p_{rf}, \quad (1.166)$$

这里 p_0 、 p_1 、 β_{01} 、 β_{02} 、 β_{03} 为待定常量， $\beta_{03} > \beta_{01} > 0$ ； p_{w0} 为波动扩展系数， γ_{Aw} 、 A_{N0} 、 A_{N1} 为待定常数， f_{Aw} 为单边波动频率， $f_{Aw} = T_{Aw}^{-1}$ ， T_{Aw} 为数据波动周期； p_{rf} 为细化函数；诸待定参量由对实验数据的方程拟合确定。

方程 (1.166) 式一趋势性简化近似形式为

$$A_{\text{selog}} = [p_{A0} \exp(-\beta A_N) - p_1][1 + p_{w0} \exp(-\gamma_{Aw} A_N)] \cos^2[\pi f_{Aw}(A_N - A_{N1})] + p_{rf}, \quad (1.167)$$

这里 $\beta = \beta_{03} - \beta_{01}$, $p_{A0} = p_0 \exp[(\beta_{03} - \beta_{01}) A_{N0}]$ 。

简单地, 由方程 (1.167) 式, 当考虑细化函数 $p_{rf} = 0$ 时, 得在扩展波动周期 $T_{Aw} = 11$ 时一简略趋势性具体方程为

$$A_{\text{selog}} = [12.5 \exp(-0.017 A_N) - 1.5][1 - \exp(-0.03 A_N) \cos^2[11^{-1} \pi(A_N - 7)]]; \quad (1.168)$$

方程 (1.168) 式与数据之间的相关系数为 0.8820, 曲线如图 1-24 所示。

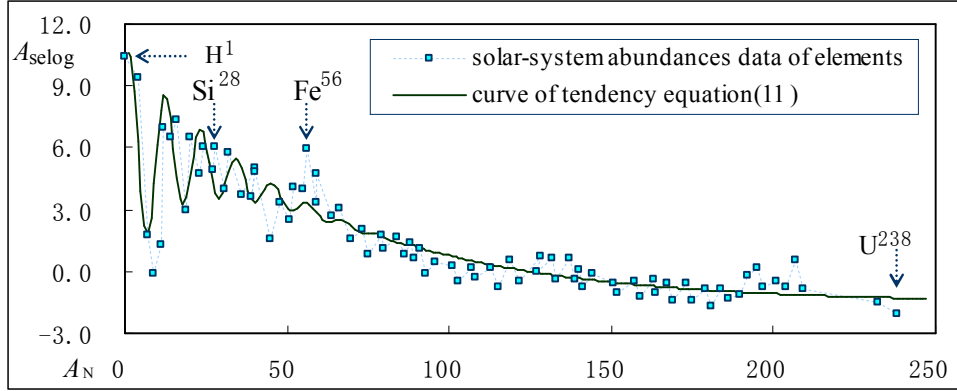


图 1-24 太阳系元素丰度数据趋势性方程曲线图 ($T_{Aw}=11$)

Fig. 1-24 Curve figure of simplified tendency equation of abundances data of elements in Solar System (when $T_{Aw}=11$)

在考虑细化函数 p_{rf} 时, 其含有若干波动成分, 其中的主要几个波动周期分别近似为长周期 $T_{rfl} = 76$, 中周期 $T_{rfM1} = 38$ 、 $T_{rfM2} = 22$, 短周期 $T_{rfS1} = 4$ 、 $T_{rfS2} = 2$ 。

当主要考虑 p_{rf} 的长周期 $T_{rfl} = 76$ 的细化波动时, 即由 (1.167) 式及 (1.168) 式得太阳系元素丰度方程一细化形式

$$A_{\text{selog}} = [12.5 \exp(-0.017 A_N) - 1.5][1 - \exp(-0.03 A_N) \cos^2[11^{-1} \pi(A_N - 7)]] + 0.5 \cos[38^{-1} \pi(A_N - 56)]; \quad (1.169)$$

方程 (1.169) 式与数据之间的相关系数为 0.8913, 曲线如图 1-25 所示。

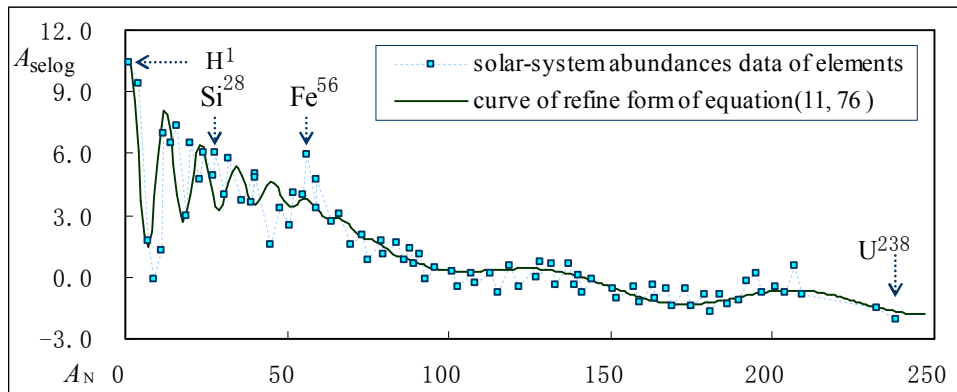


图 1-25 太阳系元素丰度方程的细化形式曲线图 ($T_{Aw}=11, T_{rfl}=76$)

Fig. 1-25 Curve figure of refinement equation of abundances data of elements in Solar System (when $T_{Aw}=11$ and $T_{rfl}=76$)

由方程 (1.167) 式及 (1.169) 式, 当扩展波动周期 $T_{Aw} = 11$, 并主要考虑细化函数 p_{rf} 的长周期 $T_{rfl} = 76$ 及短周期 $T_{rfS1} = 4$ 的细化波动时, 亦可得太阳系元素方程的一趋势性具体形式为

$$A_{\text{selog}} = [12.5 \exp(-0.017 A_N) - 1.5][1 - \exp(-0.03 A_N) \cos^2[11^{-1} \pi(A_N - 7)]] + 0.5[\cos[38^{-1} \pi(A_N - 56)] + \cos(2^{-1} \pi A_N)]; \quad (1.170)$$

方程 (1.170) 式与数据之间的相关系数为 0.9023, 曲线如图 1-26 所示。

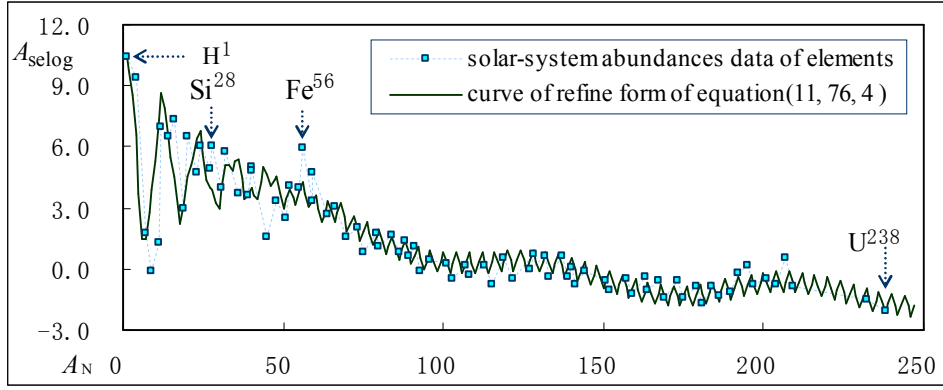


图 1-26 太阳系元素丰度方程的细化形式曲线图 ($T_{Aw}=11, T_{rL}=76, T_{rSI}=4$)

Fig. 1-26 Curve figure of refinement equation of abundances data of elements in the Solar System (when $T_{Aw}=11, T_{rL}=76$ and $T_{rSI}=4$)

参考方程 (1.170) 式, 当考虑扩展波动周期 $T_{Aw} = 14$, 并对 p_r 的长周期 $T_{rL} = 76$ 及短周期 $T_{rSI} = 4$ 进行二重细化时, 亦相应可得太阳系元素方程的一趋势性具体形式为

$$A_{selog} = [13.1 \exp(-0.017 A_N) - 1.5][1 - \exp(-0.03 A_N) \cos^2[14^{-1} \pi(A_N - 9)]] \\ + [0.5 + \exp(-0.014 A_N)][\cos[38^{-1} \pi(A_N - 56)] + \cos(2^{-1} \pi A_N)]; \quad (1.171)$$

方程 (1.171) 式与数据之间的相关系数为 0.9419, 曲线如图 1-27 所示。

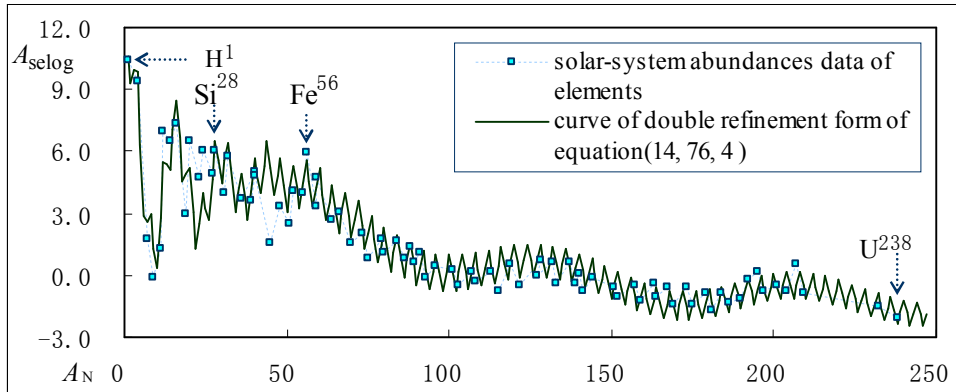


图 1-27 太阳系元素丰度方程的二重细化形式曲线图 ($T_{Aw}=14, T_{rL}=76, T_{rSI}=4$)

Fig. 1-27 Curve figure of double refinement equation of abundances data of elements in the Solar System (when $T_{Aw}=14, T_{rL}=76$ and $T_{rSI}=4$)

方程 (1.166) 式~(1.171) 式是太阳系元素丰度 A_{selog} 与元素原子核质量数 (核子数) A_N 之间关系的趋势性简略表述形式。

对于太阳系元素丰度的并行计算分析探讨, 更为简洁地, 还可以直接给出 A_{selog} 与元素原子序数 Z 之间的一般性趋势方程形式为

$$A_{selog} = [b_{Z0} \frac{\exp[\alpha_{Z1}(Z - Z_0)] - \exp[-\alpha_{Z2}(Z - Z_0)]}{2 \cosh[\alpha_{Z3}(Z - Z_0)]} - b_{Z1}] \\ \times [1 + b_{Zw0} \exp(-\gamma_{Zw} Z) \cos^2[\pi f_{Zw}(Z - Z_1)]] + b_{Zrf}, \quad (1.172)$$

这里 b_{Z0} 、 b_{Z1} 、 α_{Z1} 、 α_{Z2} 、 α_{Z3} 为待定常量, $\alpha_{Z3} > \alpha_{Z1} > 0$; b_{Zw0} 为波动扩展系数, γ_{Zw} 、 Z_0 、 Z_1 为待定常数, f_{Zw} 为单边波动频率, $f_{Zw} = T_{Zw}^{-1}$, T_{Zw} 为数据波动周期; b_{Zrf} 为细化函数; 诸待定参量仍由对实验数据的方程拟合确定。

方程 (1.172) 式一趋势性简化近似形式为

$$A_{selog} = [b_{Z\alpha} \exp(-\alpha_Z Z) - b_{Z1}][1 + b_{Zw0} \exp(-\gamma_{Zw} Z) \cos^2[\pi f_{Zw}(Z - Z_1)]] + b_{Zrf}, \quad (1.173)$$

这里 $\alpha_Z = \alpha_{Z3} - \alpha_{Z1}$, $b_{Z\alpha} = b_{Z0} \exp[(\alpha_{Z3} - \alpha_{Z1})Z_0]$ 。

由方程 (1.173) 式, 当考虑细化函数 $b_{Zrf} = 0$ 时, 得在扩展波动周期 $T_{Zw} = 6$ 时一简略趋势性具体方程为

$$A_{\text{selog}} = [13.8 \exp(-0.026Z) - 3.0][1 - \exp(-0.02Z) \cos^2[6^{-1}\pi(Z-4)]]; \quad (1.174)$$

方程 (1.174) 式与数据之间的相关系数为 0.8983, 曲线如图 1-28 所示。

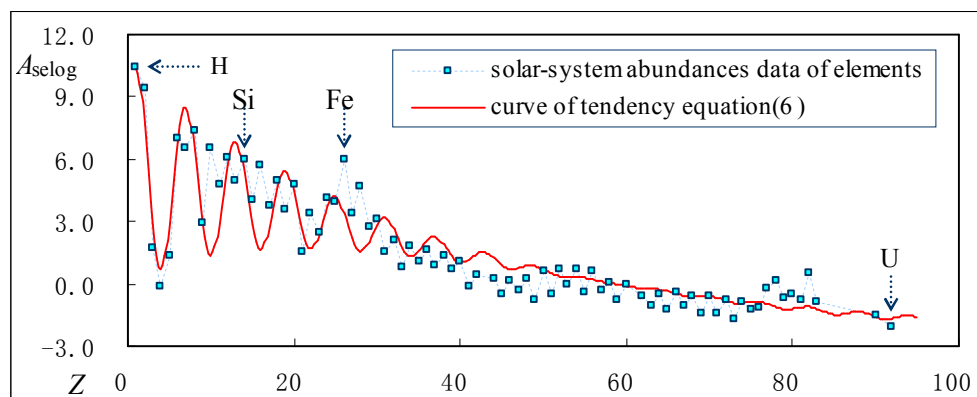


图 1-28 太阳系元素丰度数据趋势性方程曲线图 ($T_{Zw}=6$)

Fig. 1-28 Curve figure of simplified tendency equation of abundances data of elements in Solar System (when $T_{Zw}=6$)

在考虑细化函数 b_{Zrf} 时, 其亦含有若干波动成分, 其中的主要几个波动周期分别近似为长周期 $T_{ZrL} = 28$, 中周期 $T_{ZrM} = 10$, 短周期 $T_{ZrS} = 2$ 。

当主要考虑细化函数 b_{Zrf} 的长周期 $T_{ZrL} = 28$ 的细化波动时, 即由方程 (1.173) 式及方程 (1.174) 式得太阳系元素丰度方程在趋势层面的一细化形式为

$$A_{\text{selog}} = [13.6 \exp(-0.024Z) - 3.2][1 - \exp(-0.02Z) \cos^2[6^{-1}\pi(Z-4)]] + 0.5 \cos[14^{-1}\pi(Z-26)]; \quad (1.175)$$

方程 (1.175) 式与数据之间的相关系数为 0.8947, 曲线如图 1-29 所示。

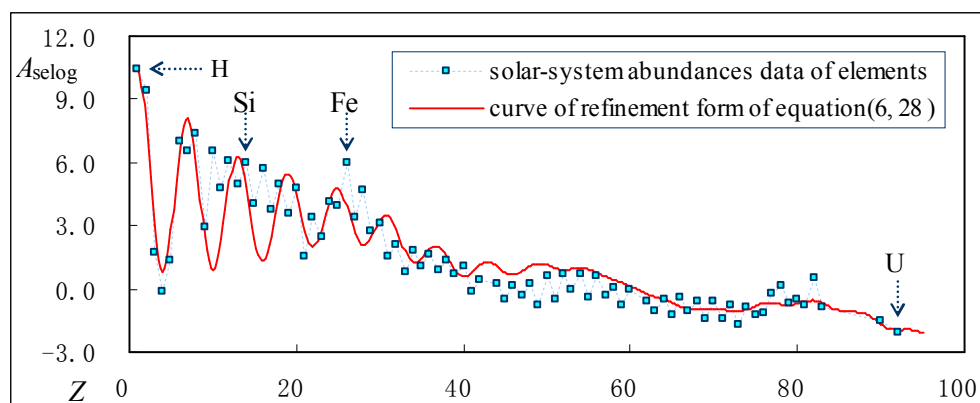


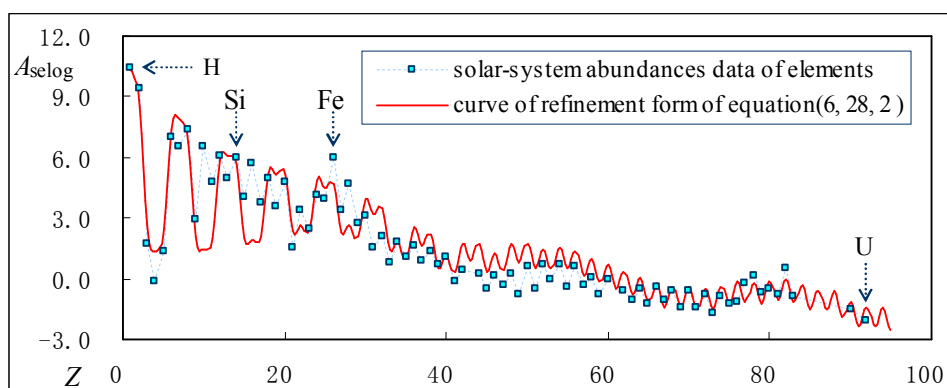
图 1-29 太阳系元素丰度方程的细化形式曲线图 ($T_{Zw}=6, T_{ZrL}=28$)

Fig. 1-29 Curve figure of refinement equation of abundances data of elements in Solar System (when $T_{Zw}=6$ and $T_{ZrL}=28$)

由方程 (1.173) 式及方程 (1.175) 式, 当考虑细化函数 b_{Zrf} 的长周期 $T_{ZrL} = 28$ 及短周期 $T_{ZrS} = 2$ 的细化波动时, 亦可得太阳系元素方程的一趋势性具体形式为

$$A_{\text{selog}} = [14.0 \exp(-0.024Z) - 3.2][1 - \exp(-0.02Z) \cos^2[6^{-1}\pi(Z-4)]] + 0.5[\cos[14^{-1}\pi(Z-26)] + \cos(\pi Z)]; \quad (1.176)$$

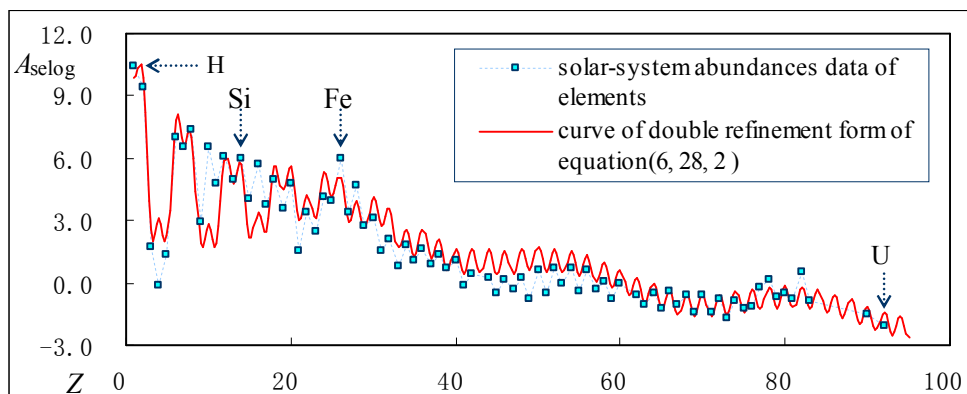
方程 (1.176) 式与数据之间的相关系数为 0.9120, 曲线如图 1-30 所示。

图 1-30 太阳系元素丰度方程的细化形式曲线图 ($T_{zw}=6, T_{zrl}=28, T_{zrs}=2$)Fig. 1-30 Curve figure of refinement equation of abundances data of elements in the Solar System (when $T_{zw}=6, T_{zrl}=28$ and $T_{zrs}=2$)

当考虑对函数 b_{zrf} 的长周期 $T_{zrl}=28$ 及短周期 $T_{zrs1}=2$ 进行二重细化时, 亦相应可得太阳系元素方程的一趋势性具体形式为

$$A_{selog} = [13.3 \exp(-0.026Z) - 2.8][1 - \exp(-0.045Z) \cos^2[6^{-1}\pi(Z-4)]] + [0.5 + \exp(-0.06Z)][\cos[14^{-1}\pi(Z-26)] + \cos(\pi Z)]; \quad (1.177)$$

方程 (1.177) 式与数据之间的相关系数为 0.9339, 曲线如图 1-31 所示。

图 1-31 太阳系元素丰度方程的二重细化形式曲线图 ($T_{zw}=6, T_{zrl}=28, T_{zrs}=2$)Fig. 1-31 Curve figure of double refinement equation of abundances data of elements in the Solar System (when $T_{zw}=6, T_{zrl}=28$ and $T_{zrs}=2$)

上述关于太阳系元素丰度分析的二个并行方向趋势性简略方程, 还需进行相应的比例总量等条件约束分析, 细节上的幅值及频率特征调节, 及根据数据的补充修正动态情况予以适当调整, 结合稳定核素趋势性方程和比结合能方程联合研究, 并给出共同的解析基础, 为深入探索宇宙元素丰度数据特征、元素起源及演化等解析表述提供分析途径及方程形式参考。

1.2.17 复合扩展型双曲正切方程生成的周期性曲线

对于连续函数 $y = f(x)$, 结合一周期函数 $P(x)$, 可构造出一复合形式的周期性或准周期性曲线方程为

$$y = f(P(x)); \quad (1.178)$$

当函数 $P(x)$ 周期性取值为 P_0 时, 则相应地 $y = f(x)$ 亦有周期性取值 $f(P_0)$ 。

依据方程 (1.178)、(1.19) 二式, 即有复合扩展型双曲正切方程生成的周期性曲线方程形式

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1 P(x)] - \exp[-\alpha_2 P(x)]}{2 \cosh[\alpha_3 P(x)]}, \quad (1.179)$$

这里 A 、 y_0 、 α_1 、 α_2 、 α_3 为待定常量。

对于方程 (1.179) 式, 在极限下 $\max[\text{abs}[\alpha_1 P(x), \alpha_2 P(x), \alpha_3 P(x)]] \ll 1$ 时, 其形式可简化为

$$y = y_0 + A \frac{[1 + \alpha_1 P(x)] - [1 - \alpha_2 P(x)]}{[1 + \alpha_3 P(x)] + [1 - \alpha_3 P(x)]} = y_0 + \frac{1}{2} A(\alpha_1 + \alpha_2) P(x). \quad (1.180)$$

简单地, 取周期函数 $P(x)$ 为三角函数 $P(x) = \sin[\beta(x-x_0)]$, 则方程 (1.179) 式为

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1 \sin[\beta(x-x_0)]] - \exp[-\alpha_2 \sin[\beta(x-x_0)]]}{2 \cosh[\alpha_3 \sin[\beta(x-x_0)]]}, \quad (1.181)$$

式中 x_0 、 β 为待定常量; 当 $P(x)$ 周期性经过横轴时, 有周期性 $y(\sin[\beta(x-x_0)] = 0) = y_0$ 。

下面给出方程 (1.181) 式在 $x_0 = 0$ 、 $y_0 = 0$ 、 $A = 1.0$ 、 $\beta = 0.2$ 时的部分周期性曲线图示。

近似正弦波曲线 ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.16$), 依据方程 (1.174) 式, 方程 (1.181) 式可简化为

$$y = \tanh[0.16 \sin[0.2x]] \approx 0.16 \sin[0.2x]; \quad (1.182)$$

方程曲线如图 1-32 所示。

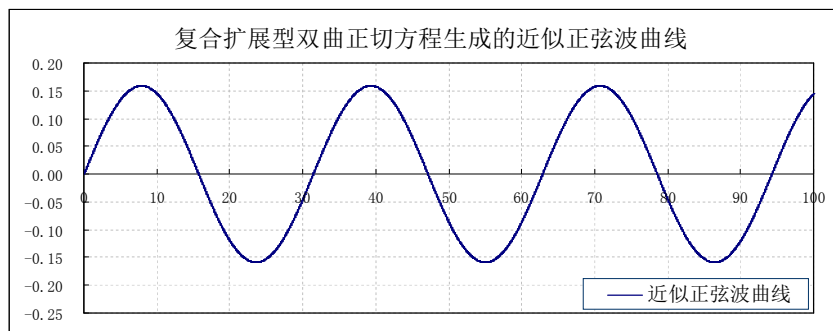


图 1-32 复合扩展型双曲正切方程生成的近似正弦波曲线图
Fig. 1-32 Curve figure of an approximate sine wave generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

近似方波曲线 ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 18.0$); 方程 (1.181) 简化为

$$y = \tanh[18.0 \sin[0.2x]]; \quad (1.183)$$

方程曲线如图 1-33 所示。

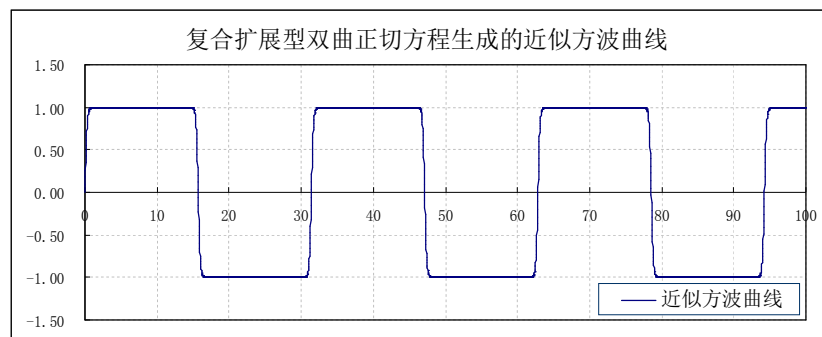


图 1-33 复合扩展型双曲正切方程生成的近似方波曲线图
Fig. 1-33 Curve figure of an approximate square wave generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

双凹波曲线 ($\alpha_1 = 16.0$ 、 $\alpha_2 = 17.0$ 、 $\alpha_3 = 18.0$), 如图 1-34 所示:

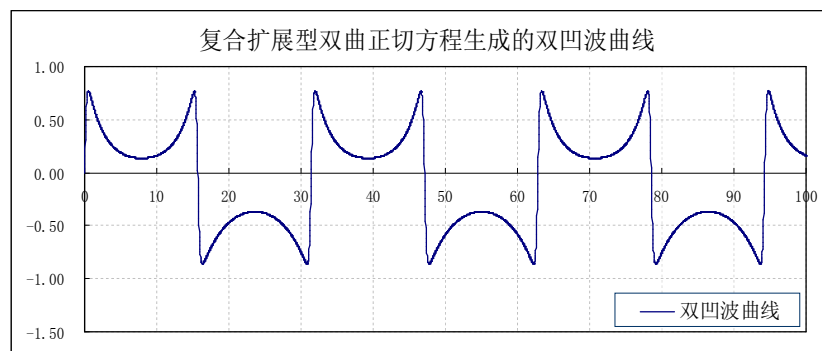


图 1-34 复合扩展型双曲正切方程生成的双凹波曲线图
Fig. 1-34 Curve figure of an upper and lower both concave wave generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

双凸波曲线 ($\alpha_1 = 18.5$ 、 $\alpha_2 = 18.3$ 、 $\alpha_3 = 18.0$)，如图 1-35 所示：

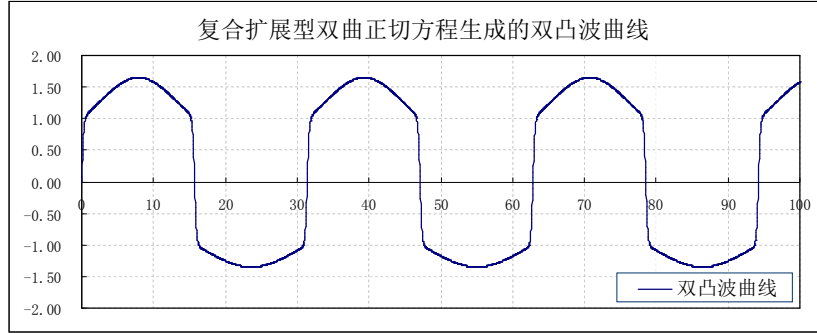


图 1-35 复合扩展型双曲正切方程生成的双凸波曲线图

Fig. 1-35 Curve figure of an upper and lower both convex wave generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

上凹下凸波曲线 ($\alpha_1 = 17.2$ 、 $\alpha_2 = 18.3$ 、 $\alpha_3 = 18.0$)，如图 1-36 所示：

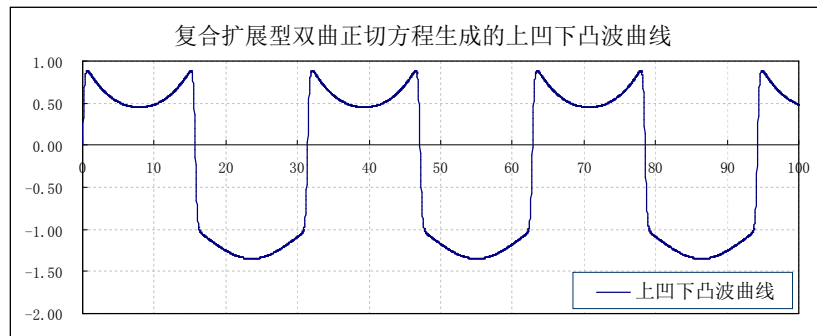


图 1-36 复合扩展型双曲正切方程生成的上凹下凸波曲线图

Fig. 1-36 Curve figure of an upper concave with lower convex wave generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

上凸下凹波曲线 ($\alpha_1 = 18.4$ 、 $\alpha_2 = 17.2$ 、 $\alpha_3 = 18.0$)，如图 1-37 所示：

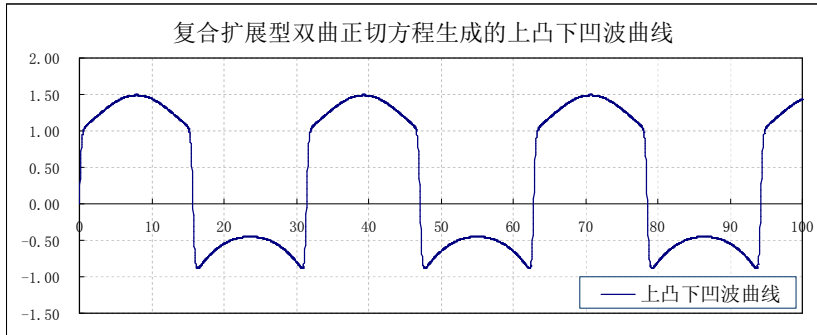


图 1-37 复合扩展型双曲正切方程生成的上凸下凹波曲线图

Fig. 1-37 Curve figure of an upper convex with lower concave wave generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

参照方程 (1.124) 式，将方程 (1.178) 式表示为扩展型周期波叠加形式

$$y = \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} \left[y_{0\Lambda} + A_{w\Lambda} \frac{\exp[\alpha_{1w\Lambda} P(x - x_{0\Lambda})] - \exp[-\alpha_{2w\Lambda} P(x - x_{0\Lambda})]}{2 \cosh[\alpha_{3w\Lambda} P(x - x_{0\Lambda})]} \right], \quad (1.184)$$

这里 Θ 、 Λ 为自然数， $\Theta \geq 1$ 、 $\Theta \geq \Lambda \geq 1$ ； $P(x - x_{0\Lambda})$ 为基本周期函数， $x_{0\Lambda}$ 、 $y_{0\Lambda}$ 、 $A_{w\Lambda}$ 、 $\alpha_{1w\Lambda}$ 、 $\alpha_{2w\Lambda}$ 、 $\alpha_{3w\Lambda}$ 为各分项扩展型周期波的曲线形态系数。

取 $P(x - x_{0\Lambda}) = \sin[\beta_{\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]$ ，这里 β_{Λ} 为待定常量；则方程 (1.184) 式为

$$y = \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} \left[y_{0\Lambda} + A_{w\Lambda} \frac{\exp[\alpha_{1w\Lambda} \sin[\beta_{\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]] - \exp[-\alpha_{2w\Lambda} \sin[\beta_{\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]]}{2 \cosh[\alpha_{3w\Lambda} \sin[\beta_{\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]]} \right]. \quad (1.185)$$

下面给出方程 (1.185) 式在 $\Theta = 2$, $x_{01} = 0$ 、 $x_{02} = 10$, $y_{01} = y_{02} = 0$, $A_{w1} = 1.0$ 、 $A_{w2} = 0.3$, $\alpha_{3w1} = \alpha_{3w2} = 18.0$, 二波频率比分别为有理数与无理数时, 二波叠加的部分曲线。

当 $\alpha_{1w1} = \alpha_{2w2} = 18.5$, $\alpha_{1w2} = \alpha_{2w1} = 17.5$, $\beta_1 = 0.2$ 、 $\beta_2 = 0.7$ 时, 由方程 (1.185) 式得频率比为 $7/2$ 的二波叠加曲线如图 1-38 所示; 曲线呈现出周期性特征, 且兼具对称性。

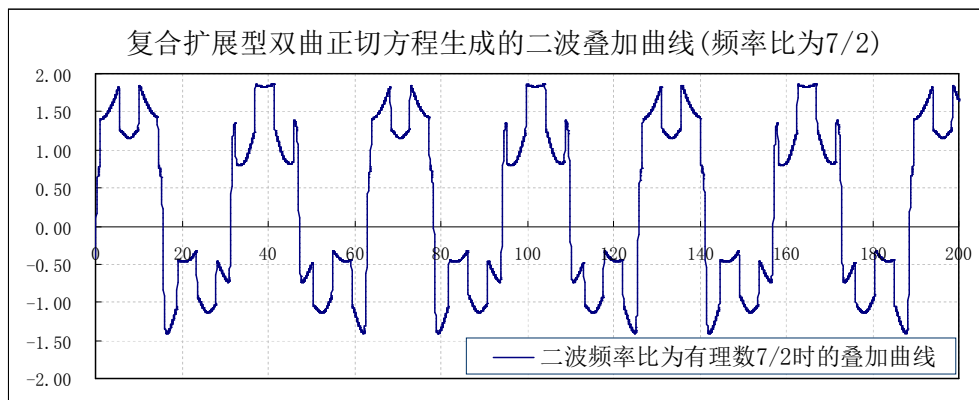


图 1-38 复合扩展型双曲正切方程生成的频率比为有理数 $7/2$ 的二波叠加曲线图
Fig. 1-38 Superimposed curve figure when the frequency ratio is a rational number $7/2$ of two waves generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

当 $\alpha_{1w1} = \alpha_{2w2} = 17.5$, $\alpha_{1w2} = \alpha_{2w1} = 18.5$, $\beta_1 = 0.3$ 、 $\beta_2 = 0.7$ 时, 由方程 (1.185) 式得频率比为 $7/3$ 的二波叠加曲线如图 1-39 所示; 曲线仍呈现周期性特征, 但对称性消失。

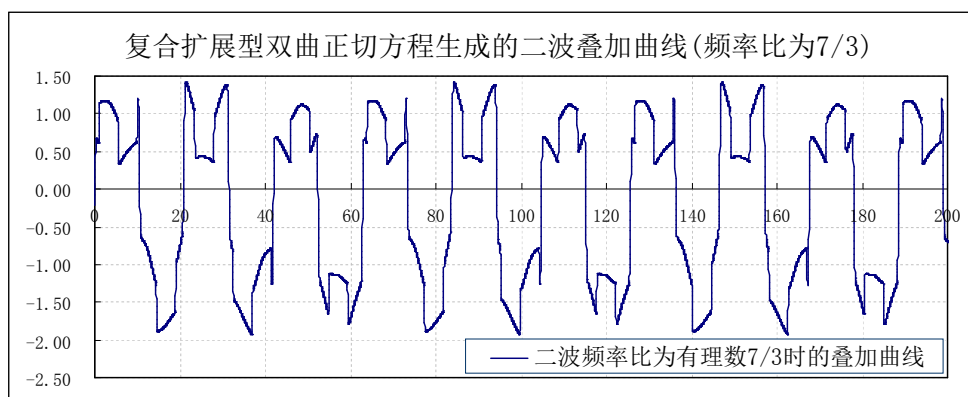


图 1-39 复合扩展型双曲正切方程生成的频率比为有理数 $7/3$ 的二波叠加曲线图
Fig. 1-39 Superimposed curve figure when the frequency ratio is a rational number $7/3$ of two waves generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

当 $\alpha_{1w1} = \alpha_{2w2} = 16.0$, $\alpha_{1w2} = \alpha_{2w1} = 17.0$, $\beta_1 = 0.3$ 、 $\beta_2 = 0.3\sqrt{7}$ 时, 由方程 (1.185) 式得频率比为 $\sqrt{7}$ 的二波叠加曲线如图 1-40 所示; 曲线仅呈现出准周期性特征。

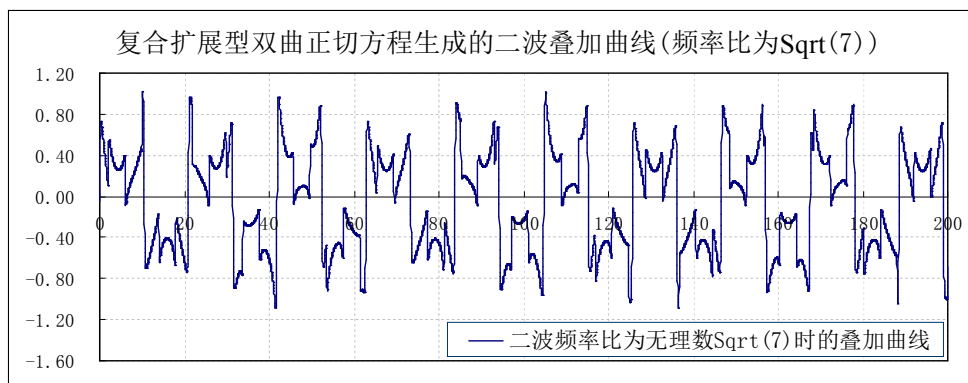


图 1-40 复合扩展型双曲正切方程生成的频率比为无理数 $7^{1/2}$ 的二波叠加曲线图
Fig. 1-40 Superimposed curve figure when the frequency ratio is an irrational number $7^{1/2}$ of two waves generated by the compound-extended hyperbolic tangent equation

2 非线性动力学方程的兼容性及其延展性

从简学或维学的规律谱系及规律谱系簇角度考察,非线性动力学方程(1.1)式能够自动兼容并拓展 Newton 动力学位移—时间方程、RLC 串联电路中电荷量—时间方程等形式,其双曲正切函数解亦能够应用于粒子统计分布的计算分析,部分非线性方程形式还具有近似变频波动特征。数学方程具有适当的延展性,其一极限解或近似解返回到微分方程形式后,微分方程的其它解有时也具有相应的意义,甚至包括着与之相对应的物理效应。

科学理论,在于有效而简洁;即在描述有效的前提下兼顾形式上的简洁。简洁形式一般具有广泛的普适性,但亦往往欠缺具体针对性;一般具体针对性较强时,往往普适性较弱;而有效乃至阶段性有效,则是科学理论的主旨。

下面依据方程(1.1)式的形式,给出部分具有非线性特征的若干具体方程表述,其中包括电路中电存元件预言、广义分布函数及广义分布密度函数、粒子统计负分布与正分布的数学对称性描述、Planck 量子方程的频率区间趋势性展望、波动曲线在负频率与正频率间过渡转折区域的特征、数据库理论的一种简洁构架模式中的趋势方程、国家能源消费总量及人口总数与 GDP 总值关系方程、国家各阶层人均年收入值与其所占人口比例数关系方程等方面内容。

2.1 连接方程的非线性微分方程形式在经典 Newton 动力学方程与 RLC 电路方程方面的兼容性(包括电存器、电敏器等电路基础元件预言及其特征描述)

非线性方程(1.1)式

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi_{IE} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = \psi_{EE}$$

兼容经典 Newton 动力学位移 y —时间 t 方程、RLC 串联电路中电荷量 Q —时间 t 方程的近似形式分别为

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu_0 \frac{dy}{dt} + b_{IE} + k_0 y + n_0 y^2 + g_0 y^3 = F_{EE}, \quad (2.1)$$

$$L_0 \frac{d^2 Q}{dt^2} + R_0 \frac{dQ}{dt} + U_{IE} + \frac{1}{C_0} Q + N_0 Q^2 + G_0 Q^3 = U_{EE}; \quad (2.2)$$

在方程(2.1)式中 m_0 、 μ_0 、 k_0 分别为质点质量、介质阻力系数、介质弹性系数, F_{EE} 为外作用力函数;这里 b_{IE} 定义为自激励函数,具有部分本征性质,量纲[mkgs^{-2}]; n_0 、 g_0 定义为非线性极限系数, n_0 量纲为[$\text{m}^{-1}\text{kgs}^{-2}$], g_0 量纲为[$\text{m}^{-2}\text{kgs}^{-2}$]。在 $g_0 = 0$ 情况下,当 $n_0 < 0$ 时(2.1)式为非线性正向饱和过程方程,当 $n_0 > 0$ 时为逆向饱和过程方程,当 $n_0 = 0$ 时(2.1)式即转化为已知的经典 Newton 动力学位移 y —时间 t 方程形式

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu_0 \frac{dy}{dt} + k_0 y = F_{EE} - b_{IE}; \quad (2.3)$$

在方程(2.2)式中 L_0 、 R_0 、 C_0 分别为串联电路中的电感值、电阻值、电容值, Q 为电路中传递状态的电荷量, U_{EE} 为电压源激励函数;这里 U_{IE} 定义为电路自激励函数,同于电压量纲[$\text{m}^2\text{kgs}^{-3}\text{A}^{-1}$],其具有状态转换台阶或门限的部分内秉性质,亦具有在外激励函数作用下产生相应阻碍或释放电压的固有特征,故同时定义此等效元件名称为“电态元件, Statransor”,文字及图形符号为“S, —□—”,等效电压方程 U_S 为

$$U_S = U_{IE};$$

N_0 、 G_0 定义为非线性元件的特征值,其皆具有逆向荷控型元件性质,是非线性演化极限特征的系数,具有参与构造新型非线性电子存储器的特性; N_0 量纲为[$\text{m}^2\text{kgs}^{-5}\text{A}^{-3}$],定义此非线性元件名称为“电存元件,或电存器, Nonlinstor”,文字及图形符号为“N, —□—”,端电压方程 U_N 为

$$U_N = N_0 Q^2; \quad (2.4)$$

G_0 量纲为 $[m^2 \text{kg s}^{-6} \text{A}^{-4}]$ ，定义此非线性元件名称为“电敏元件，或电敏器，Geomsensor”，文字及图形符号为“G， $\text{—}\text{—}\text{—}$ ”，端电压方程 U_G 为

$$U_G = G_0 Q^3; \quad (2.5)$$

方程 (2.2) 式即为 RLCNG 串联电路中电荷量 Q —时间 t 方程。

当 $L_0 = 0$ 、 $G_0 = 0$ 时，方程 (2.2) 式简化为由电存元件参与的 RCN 串联电路方程

$$R_0 \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C_0} Q + N_0 Q^2 = U_{EE} - U_{IE}, \quad (2.6)$$

该方程的一形式亦为

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{N_0}{R_0} \left[Q + \frac{1}{2C_0 N_0} \right]^2 + \frac{1}{R_0} [U_{IE} - U_{EE}] - \frac{1}{4R_0 C_0^2 N_0} = 0; \quad (2.7)$$

其可在 $U_{EE} - U_{IE}$ 为常量时直接给出包含电荷量双曲正切曲线形式的解

$$Q = \begin{cases} Q_{m0} + A_Q \tan[\alpha_Q(t - t_{m0})], & \xi_{Q2} \nu_{Q0} > 0, \alpha_Q = \sqrt{\xi_{Q2} \nu_{Q0}}, A_Q = -\alpha_Q \xi_{Q2}^{-1} \\ Q_{m0} + A_Q \tanh[\alpha_Q(t - t_{m0})], & \xi_{Q2} \nu_{Q0} < 0, \alpha_Q = \sqrt{-\xi_{Q2} \nu_{Q0}}, A_Q = \alpha_Q \xi_{Q2}^{-1} \\ Q_{m0} + \xi_{Q2}^{-1} [t + \nu_{QC}]^{-1}, & \nu_{Q0} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

式中 ν_{QC} 为待定常量。

可得常量 Q_{m0} 、 ξ_{Q2} 、 ν_{Q0} 分别为

$$Q_{m0} = -\frac{1}{2C_0 N_0}, \quad \xi_{Q2} = \frac{N_0}{R_0}, \quad \nu_{Q0} = \frac{1}{R_0} [U_{IE} - U_{EE}] - \frac{1}{4R_0 C_0^2 N_0}; \quad (2.9)$$

且在解的前二式中有常量 Q_{m0} 与 t_{m0} 的关系为 $Q(t = t_{m0}) = Q_{m0}$ 。

对于电存端电压方程 (2.4) 式，有电存元件的二种等效电容方程形式表述

$$\begin{aligned} U_N &= N_0 Q^2 \\ &= [N_0 Q] Q = \frac{1}{C_{N1}} Q, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} dU_N &= \frac{dU_N}{dQ} dQ \\ &= [2N_0 Q] dQ = \frac{1}{C_{N2}} dQ; \end{aligned} \quad (2.11)$$

式中 C_{N1} 、 C_{N2} 为由电存元件引入的二种等效电容表述形式

$$C_{N1} = \frac{1}{N_0 Q}, \quad C_{N2} = \frac{1}{2N_0 Q}. \quad (2.12)$$

电路诸基本元件，既分别代表着相应的电磁学效应，又通过能量形式转换而相互联系。

电存元件的等效电容形式表明，在元件间的递进关系上，如果将电感作为是电阻的深化电流型元件，则电存即是电容的逆向深化荷控型元件。如此，从电存元件的等效电容形式切入，是探索并进而实现电存元件模式构造、融合及部分地代替半导体器件的重要途径及方向。

依照方程 (2.6) 式，RCN 串联电路可直接输出电荷量的双曲正切曲线，或在 RCN 串联电路中电容器二端输出电压量 U_C 的双曲正切方程形式

$$\begin{aligned} U_C &= C_0^{-1} Q \\ &= C_0^{-1} Q_{m0} + C_0^{-1} A_Q \tanh[\alpha_Q(t - t_{m0})]; \end{aligned} \quad (2.13)$$

电态元件（或电感器）图形符号“ $\text{—}\text{—}\text{—}$ ”及电存元件（或电存器）图形符号“ $\text{—}\text{—}\text{—}$ ”即是对连接方程的理想形式、非线性微分方程 (2.6) 式及其条件解 (2.8) 式中双曲正切函数曲线形态的趋势性标记。

当 $N_0 = 0$ 、 $G_0 = 0$ 时, 方程 (2.2) 式即转化为已知的经典 RLC 串联电路电荷量 Q —时间 t 方程形式

$$L_0 \frac{d^2 Q}{dt^2} + R_0 \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C_0} Q = U_{EE} - U_{IE}。 \quad (2.14)$$

对于方程 (2.1) 式, 当 $\mu_0 = 0$ 、 $k_0 = 0$ 、 $g_0 = 0$ 时, 有最简单的非线性动力学方程

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + n_0 y^2 = F_{EE} - b_{IE}; \quad (2.15)$$

故而当 m_0 、 n_0 、 b_{IE} 、 F_{EE} 皆为常量时, 积分上式解得能量方程

$$\frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{3} n_0 y^3 = [F_{EE} - b_{IE}]y + \phi_E, \quad (2.16)$$

这里 ϕ_E 为能量待定常量。

方程 (2.16) 式在 $n_0 \neq 0$ 、 $F_{EE} = b_{IE}$ 、 $\phi_E = 0$ 时的简单非线性情况下, 可得位移 y 、速度 u_n 、加速度 g_n 的局部一特解及通解分别为

$$\begin{aligned} y = 0, \quad u_n = \frac{dy}{dt} = 0, \quad g_n = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{du_n}{dt} = 0; \\ y = -\frac{6m_0}{n_0[t+t_0]^2}, \quad u_n = \frac{12m_0}{n_0[t+t_0]^3}, \quad g_n = -\frac{36m_0}{n_0[t+t_0]^4}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

式中 $u_n \ll c$, c 为真空中光速, t_0 为时间待定常量, 其与初始位移、速度及加速度相关。

同样对于方程 (2.2) 式, 则有电感与电存元件的 LN 串联电路微分方程为

$$L_0 \frac{d^2 Q}{dt^2} + U_{IE} + N_0 Q^2 = U_{EE}; \quad (2.18)$$

在 $U_{EE} - U_{IE}$ 为常量时, 积分上式得方程

$$\frac{1}{2} L_0 \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 + \frac{1}{3} N_0 Q^3 = [U_{EE} - U_{IE}]Q + \phi_{QE}, \quad (2.19)$$

式中 ϕ_{QE} 为待定常量; 则在 $N_0 \neq 0$ 、 $U_{EE} = U_{IE}$ 、 $\phi_{QE} = 0$ 时进一步解得电荷量 Q —时间 t 方程、电流 I_N —时间 t 方程分别为

$$Q = -\frac{6L_0}{N_0[t+t_{Q0}]^2}, \quad I_N = \frac{dQ}{dt} = \frac{12L_0}{N_0[t+t_{Q0}]^3}; \quad (2.20)$$

式中 t_{Q0} 为时间待定常量。

对于由非线性方程 (2.2) 式引入的电存元件, 根据方程 (2.4) 式, 当二个电存元件 N_{01} 、 N_{02} 串联时, 得串联后的端电压 $U_{N\Sigma}$ 方程为

$$\begin{aligned} U_{N\Sigma} &= N_{01} Q^2 + N_{02} Q^2 \\ &= [N_{01} + N_{02}] Q^2; \end{aligned} \quad (2.21)$$

故得二个电存元件串联时的总电存值 $N_{0\Sigma}$ 为

$$\begin{aligned} N_{0\Sigma} &= U_{N\Sigma} Q^{-2} \\ &= N_{01} + N_{02}。 \end{aligned} \quad (2.22)$$

而当二个电存元件 N_{01} 、 N_{02} 并联时, 根据 (2.4) 式得其二电荷量 Q_1 、 Q_2 方程分别为

$$Q_1^2 = N_{01}^{-1} U_N, \quad Q_2^2 = N_{02}^{-1} U_N; \quad (2.23)$$

有并联时二电存元件的端电压 U_N 方程

$$\begin{aligned} U_N &= N_{0P\Sigma} [Q_1 + Q_2]^2 \\ &= N_{0P\Sigma} [N_{01}^{-1} + N_{02}^{-1} \pm 2\sqrt{N_{01}^{-1}N_{02}^{-1}}] U_N; \end{aligned} \quad (2.24)$$

式中 $N_{0P\Sigma}$ 为二个电存元件并联时的总电存值；故得

$$\begin{aligned} N_{0P\Sigma} &= \frac{1}{N_{01}^{-1} + N_{02}^{-1} \pm 2\sqrt{N_{01}^{-1}N_{02}^{-1}}} \\ &= \frac{N_{01}N_{02}}{N_{01} + N_{02} \pm 2\sqrt{N_{01}N_{02}}}。 \end{aligned} \quad (2.25)$$

一般地，当取上式二并联电存元件电荷量 Q_1 、 Q_2 为同号时，则其总电存值为

$$\begin{aligned} N_{0P\Sigma} &= \frac{1}{N_{01}^{-1} + N_{02}^{-1} + 2\sqrt{N_{01}^{-1}N_{02}^{-1}}} \\ &= \frac{N_{01}N_{02}}{N_{01} + N_{02} + 2\sqrt{N_{01}N_{02}}}。 \end{aligned} \quad (2.26)$$

作为初步讨论，对于电存元件，取 Q 为简谐波函数形式

$$Q = Q_0 \cos[2\pi f_0 t + \theta_0],$$

这里 Q_0 、 $f_0 = T_N^{-1}$ 及 θ_0 分别为 Q 的简谐波函数电荷量振幅、频率及初始相位， T_N 为简谐波周期；得电存元件的电流有效值 I_{Neff} 及电压有效值 U_{Neff} 分别为

$$\begin{aligned} I_{\text{Neff}} &= \sqrt{\frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2T_N} \int_0^{T_N} [2\pi f_0 Q_0]^2 [1 - \cos[4\pi f_0 t + 2\theta_0]] dt} \\ &= \sqrt{2}\pi f_0 Q_0; \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{Neff}} &= \sqrt{\frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} [N_0 Q^2]^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4T_N} \int_0^{T_N} [N_0^2 Q_0^4] [1.5 + 2\cos[4\pi f_0 t + 2\theta_0] + 0.5\cos[8\pi f_0 t + 4\theta_0]] dt} \\ &= 0.25\sqrt{6}N_0 Q_0^2; \end{aligned} \quad (2.28)$$

故得电存元件的阻抗 Z_N 为

$$Z_N = \frac{U_{\text{Neff}}}{I_{\text{Neff}}} = \frac{\sqrt{3}N_0 Q_0}{4\pi f_0}; \quad (2.29)$$

以及电存元件的 V-A 特性曲线 $U_N - I_N$ 方程、吸收功率 P_N 、储存电能 W_N 分别为

$$I_N^2 = \frac{1}{4N_0 U_N} \left(\frac{dU_N}{dt} \right)^2, \quad P_N = N_0 Q^2 \frac{dQ}{dt}, \quad W_N = \frac{1}{3} N_0 Q^3。 \quad (2.30)$$

由此讨论表明电存元件具有非线性、高通、变频及关联电荷量的性质，具有参与构成非线性电子存储器的特征。

作为初步探讨，对于方程 (1.1) 式，其兼容 RLC 并联电路电压 U 一时间 t 的非线性方程一种近似形式为

$$C_0 \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L_0} \int U dt + I_{\text{IE}} + \frac{1}{R_0} U + D_{\text{sq}} U^2 + D_{\text{cu}} U^3 = I_{\text{EE}}; \quad (2.31)$$

另一种近似形式为

$$C_0 \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{R_0} \frac{dU}{dt} + \frac{dI_{IE}}{dt} + \frac{1}{L_0} U + K_{sq} U^2 + K_{cu} U^3 = \frac{dI_{EE}}{dt}; \quad (2.32)$$

这里 L_0 、 R_0 、 C_0 分别为并联电路中的电感值、电阻值、电容值， U 为并联电路电压， I_{EE} 为电流源激励函数； I_{IE} 为电路中电流自激励函数，同于电流量纲[A]，等效电流 I_I 方程为

$$I_I = I_{IE}; \quad (2.33)$$

D_{sq} 、 D_{cu} 、 K_{sq} 、 K_{cu} 定义为非线性元件的特征值；其中 D_{sq} 、 D_{cu} 元件端电压 U_{Dsq} 、 U_{Dcu} 与电流 I_{Dsq} 、 I_{Dcu} 或电荷量 Q_{Dsq} 、 Q_{Dcu} 的方程为

$$\begin{aligned} U_{Dsq}^2 &= \frac{1}{D_{sq}} I_{Dsq} \\ &= \frac{1}{D_{sq}} \frac{dQ_{Dsq}}{dt}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} U_{Dcu}^3 &= \frac{1}{D_{cu}} I_{Dcu} \\ &= \frac{1}{D_{cu}} \frac{dQ_{Dcu}}{dt}; \end{aligned} \quad (2.35)$$

D_{sq} 、 D_{cu} 具有电阻元件逆向深化的性质； D_{sq} 元件量纲为 $[m^{-4}kg^{-2}s^6A^3]$ ，定义其名称为“电制元件，Deepcontror”； D_{cu} 元件量纲为 $[m^{-6}kg^{-3}s^9A^4]$ ，定义其名称为“电衡元件，Deepbalanor”。

K_{sq} 、 K_{cu} 元件端电压 U_{Ksq} 、 U_{Kcu} 与电流 I_{Ksq} 、 I_{Kcu} 或电荷量 Q_{Ksq} 、 Q_{Kcu} 的方程分别为

$$\begin{aligned} U_{Ksq}^2 &= \frac{1}{K_{sq}} \frac{dI_{Ksq}}{dt} \\ &= \frac{1}{K_{sq}} \frac{d^2 Q_{Ksq}}{dt^2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} U_{Kcu}^3 &= \frac{1}{K_{cu}} \frac{dI_{Kcu}}{dt} \\ &= \frac{1}{K_{cu}} \frac{d^2 Q_{Kcu}}{dt^2}; \end{aligned} \quad (2.37)$$

K_{sq} 、 K_{cu} 具有电感元件逆向深化的性质； K_{sq} 元件量纲为 $[m^{-4}kg^{-2}s^5A^3]$ ，定义此元件名称为“电守元件，Keepstor”； K_{cu} 元件量纲为 $[m^{-6}kg^{-3}s^8A^4]$ ，定义此元件名称为“电积元件，Deepaccumor”。

这其中，引入非线性元件 D_{sq} 、 D_{cu} 、 K_{sq} 、 K_{cu} 元件是试错探讨性质的，诸元件间存在等效代换关系。

方程 (2.31)、(2.32) 二式即分别为具有非线性形式的 RLCDD 并联、RLCKK 并联电路中电压 U —时间 t 方程。

当 $D_{sq} = 0$ 、 $D_{cu} = 0$ ， $K_{sq} = 0$ 、 $K_{cu} = 0$ 时方程 (2.31)、(2.32) 二式即转化为已知的经典 RLC 并联电路电压 U —时间 t 方程形式

$$C_0 \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{R_0} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L_0} U = \frac{d}{dt} [I_{EE} - I_{IE}]. \quad (2.38)$$

方程 (2.15)、(2.17) 二式对于进一步研究方程 (2.31)、(2.32) 二式的非线性过程描述具有引导指向意义。

上述基于数学方程 (2.1)、(2.2)、(2.31)、(2.32) 四式所引入的新物理参量：动力学中自激励状态函数 b_{IE} 、非线性极限系数 n_0 、 g_0 ，电磁学中自激励状态等效元件 U_{IE} 、 I_{IE} 及非线性极限特征元件 N_0 、 G_0 、 D_{sq} 、 D_{cu} 、 K_{sq} 、 K_{cu} ，皆是属于探讨性质的，还需来自物理实验的验证及拓展；主要是 b_{IE} 、 U_{IE} 、 I_{IE} 所具有的自激励性质， n_0 、 g_0 、 N_0 、 G_0 、 D_{sq} 、 D_{cu} 、 K_{sq} 、 K_{cu} 所含有的非线性演化极限属性；其中与已有研究结论相混叠、参量表示重复、乃至不相容的方程内容及图形符号标示，尚需要进一步的深入分析、仔细甄别予以补充完善。还值得注意的是，诸基本元件的相对独立性、相互间的组合代换等效关系等，仍是重要探索方向。

对于方程 (2.1)、(2.2)、(2.31)、(2.32) 四式，引入实数阶非线性动力项及实数阶非线性元件

$$F_{rd(j_1, j_2)}^{j_1} = n_{rd(j_1, j_2)} \frac{d^{j_2} x}{dt^{j_2}}, \quad F_{rp(j_3, j_4)}^{j_3} = n_{rp(j_3, j_4)} x^{j_4}; \quad (2.39)$$

$$U_{rd(j_1, j_2)}^{j_1} = N_{rd(j_1, j_2)} \frac{d^{j_2} Q}{dt^{j_2}}, \quad U_{rp(j_3, j_4)}^{j_3} = N_{rp(j_3, j_4)} Q^{j_4}; \quad (2.40)$$

可深入描述自然现象演化的一般性趋势规律；这里实数 $j_1 > 0$ 、 $j_2 \geq 0$ 、 $j_3 > 0$ 、 $j_4 \geq 0$ ， $n_{rd(j_1, j_2)}$ 、 $n_{rp(j_3, j_4)}$ 为与质点及介质相关的动力学参数， $F_{rd(j_1, j_2)}$ 、 $F_{rp(j_3, j_4)}$ 为质点作用力表现； $N_{rd(j_1, j_2)}$ 、 $N_{rp(j_3, j_4)}$ 为元件特征值， $U_{rd(j_1, j_2)}$ 、 $U_{rp(j_3, j_4)}$ 为元件电压表现。

特别地简单地，对于上述实数阶非线性元件，当实数 $j_3 = 1.0$ 、 $j_4 = 0.5$ 及电荷量 Q 方程为

$$Q = Q_0[1 + \cos[2\pi f_0 t + \theta_0]]$$

时，则得其相应元件的阻抗 $Z_{rp(1.0, 0.5)}$ 为

$$Z_{rp(1.0, 0.5)} = \frac{N_{rp(1.0, 0.5)}}{\sqrt{2\pi f_0} \sqrt{Q_0}}. \quad (2.41)$$

电磁理论从 Faraday 的电磁感应定律及力线论到 Maxwell 的位移电流假设及电磁波方程，取得了决定性进展；如果将电磁学中的任一非能量参量解析为质量、空间、时间的表达式，则目前全部的电磁参量即都能够通过能量关系方程解析在广义的 Newton 动力学基础之上，其对深入阐释电磁的本质及起源具有根本性意义，亦是在对称性和守恒量联系方面拓展或深化 Noether 定理的有效途径。

一探讨方向是延续 Blackett 天体磁矩方程形式，即考虑天体磁矩与涡旋现象中的旋转角动量等动力学参量密切相关，同时引入内秉磁矩或初始磁矩，在唯象层面同时兼顾内秉磁矩及旋转角动量建立磁矩方程，然后通过观测数据检验，考察其融合方向的可行性及方程改进方向；表现在量纲上即是能够将电荷量的单位[C]表示为

$$1C = z_{MN} m^{n_1} kg^{n_2} s^{n_3}, \quad (2.42)$$

这里 n_1 、 n_2 、 n_3 为待定实数； z_{MN} 为无量纲待定常数，是 Maxwell 电磁学理论与 Newton 动力学理论之间的转换常数。

在构造层面，力学框架与微积分方程数学表述相伴同步形成，互为表里交融共进；其中微分方程描述了现象演化过程的即时或局部动态特性，而相应的积分方程解则给出了阶段性的开放守恒或广义饱和（极限）属性，激励、演化、守恒，构成了一个动态开放的因果链阐释，兼顾历史、立足现下、短程预测；后来的诸多数理体系框架从原理建立到推广延伸基本都沿承此方法，使得力学成为物理学等诸多学科的内核构成部分，且将伴随着整个学科的发展及跃进。如是，在传统上，诸多带有前因后果参量关系微分方程描述的“ABC 领域或方向”亦多是赋予“ABC 力学（学科）”称谓；这实际上也是一种因果转化链思想的传承和延续。

后来者若想取得能够比肩 Newton 的科学成就，至少需要建立一套更普适的超越并可展开兼容力学思想及微积分方程的理论体系，引入更深刻基础的常数继而解析开 Newon 引力常数及 Planck 量子常数。闭上眼睛想想自己所处的时代现状及自身的智力条件，就基本清楚了。

走进游历并继而再走出科学的卓越学者，对科学的整体认识及前瞻趋势把握一般会更为深刻及准确，了解科学的阶段性优势及其社会作用极限，能够俯视并纵横领域成为战术型出身的战略型科学家。

2.2 数理统计分布方程的概要方向及粒子系统统计分布的平均粒子数趋势性方程形式

2.2.1 数理统计分布方程的简略概要及脉络延展参考方向

在数理方程概要大略层面上,经典的统计分布规律有诸多表述形式,包括 Bernoulli 分布、Poisson 分布、Boltzmann 分布、Gauss 分布形式等。其中在主项表述指数函数分布的参数形式方面,如将 Boltzmann 分布拟为一次方分布(能量比参数一次方,速度参数等效二次方),将 Gauss 分布拟为二次方分布,则统计分布研究的主线脉络延展方向除高幂次与连续幂次方向(即主项表述指数函数的参数三次方、四次方等分布形式,及非整数阶次分布形式,以从 0 次幂到高次幂连续过渡诸阶次分布方程,进而分析其在自然现象演化过程的意义)外,结合累积分布函数(简称分布函数)具有严格的饱和性或极限性等特征,还有相互联系的部分近于纲领性主线脉络的延展方向或扩展疆域分别为:

一是在深化分布方向,即基于一般的饱和过程曲线及其趋势性动力学方程的若干条件解,探讨多种函数形式相复合,及对称与偏对称、单调与振荡相融合等广泛的分布规律形式;

二是在广义分布方向,即基于分布函数的严格饱和性特征,一个严格的对称或偏对称饱和方程或守恒方程,调零归一化后一般可转化为一个广义分布函数形式,其对应着一个对称或偏对称的广义分布密度函数表述,极端情况也包括具有小幅值振荡性质的广义分布密度函数形式;而一个对称或偏对称的广义分布密度函数,一般也对应着一个严格的调零归一化对称或偏对称饱和方程或守恒方程表述形式;

三是在普遍分布方向,由于部分蠕变过程可以转化为严格的对称或偏对称饱和过程,所以这类蠕变过程的描述方程同样也等效对应着相应的对称或偏对称广义分布函数及广义分布密度函数形式;如此在一般意义上,一系列能够转化或等效为蠕变过程的现象演化过程(如材料断裂、器件电磁击穿、流体湍流等),部分地也同样对应着相应的广义分布函数及广义分布密度函数形式,包括在极端情况下具有小幅值振荡性质的广义分布密度函数形式。

取一严格的饱和过程方程形式为

$$y_{es} = f_{es}(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (2.43)$$

其饱和性或极限性特征为

$$y_{es}(x \rightarrow -\infty) = y_{es \min}, \quad y_{es}(x \rightarrow +\infty) = y_{es \max}, \quad y_{es \max} > y_{es \min}, \quad \frac{df_{es}(x)}{dx} \geq 0。$$

即有调零 ($[f_{es}(x) - y_{es \min}]$) 归一化 ($[y_{es \max} - y_{es \min}]^{-1}$) 后转换为广义分布函数 $y_{GD} = f_{GD}(x)$ 的形式为

$$y_{GD} = f_{GD}(x) = \frac{f_{es}(x) - y_{es \min}}{y_{es \max} - y_{es \min}}, \quad (2.44)$$

式中 $y_{GD}(x \rightarrow -\infty) = 0$, $y_{GD}(x \rightarrow +\infty) = 1$ 。

由广义分布函数 (2.44) 式得其所对应的广义分布密度函数 $y_{GDD} = f_{GDD}(x)$ 的形式则为

$$y_{GDD} = f_{GDD}(x) = \frac{dy_{GD}}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{f_{es}(x) - y_{es \min}}{y_{es \max} - y_{es \min}} = \frac{1}{y_{es \max} - y_{es \min}} \frac{df_{es}(x)}{dx}; \quad (2.45)$$

而在已知广义分布密度函数 $y_{GDD} = f_{GDD}(x)$ 的情况下,则有广义分布函数 $y_{GD} = f_{GD}(x)$ 为

$$y_{GD}(x) = \int_{-\infty}^x f_{GDD}(t) dt, \quad (2.46)$$

式中 $f_{GDD}(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{GDD}(x) dx = 1$; $y_{GD}(x \rightarrow -\infty) = 0$, $y_{GD}(x \rightarrow +\infty) = 1$ 。

相应地在积分绝对收敛时的广义数学期望 $E_{GD}(X)$ 为

$$E_{GD}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{GDD}(x) dx. \quad (2.47)$$

依据饱和过程方程 (1.31)、(1.32)、(1.33) 三式,可得其所对应的三个广义分布函数 y_{GD} 、 y_{GDF} 、 y_{GDB} 的形式分别为

$$y_{GD} = 1 + \tanh[\alpha(x - x_0)], \quad (2.48)$$

$$y_{GDF} = \frac{1}{1 + \kappa_{FE} \exp[-2\alpha_{1FE}(x - x_0)] + (1 - \kappa_{FE}) \exp[-(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]}, \quad (2.49)$$

$$y_{GDB} = 1 - \frac{1}{1 + \lambda_{FE} \exp[2\alpha_{1FE}(x - x_0)] + (1 - \lambda_{FE}) \exp[(\alpha_{1FE} + \alpha_{2FE})(x - x_0)]}; \quad (2.50)$$

其所对应的广义分布密度函数 y_{GDD} 、 y_{GDDF} 、 y_{GDDB} 则分别为

$$y_{\text{GDD}} = \frac{dy_{\text{GD}}}{dx} = 0.5\alpha[1 - \tanh^2[\alpha(x - x_0)]] , \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} y_{\text{GDDF}} &= \frac{dy_{\text{GDF}}}{dx} \\ &= \frac{2\kappa_{\text{FE}}\alpha_{1\text{FE}}\exp[-2\alpha_{1\text{FE}}(x - x_0)] + (1 - \kappa_{\text{FE}})(\alpha_{1\text{FE}} + \alpha_{2\text{FE}})\exp[-(\alpha_{1\text{FE}} + \alpha_{2\text{FE}})(x - x_0)]}{[1 + \kappa_{\text{FE}}\exp[-2\alpha_{1\text{FE}}(x - x_0)] + (1 - \kappa_{\text{FE}})\exp[-(\alpha_{1\text{FE}} + \alpha_{2\text{FE}})(x - x_0)]]^2} , \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} y_{\text{GDDB}} &= \frac{dy_{\text{GDB}}}{dx} \\ &= \frac{2\lambda_{\text{FE}}\alpha_{1\text{FE}}\exp[2\alpha_{1\text{FE}}(x - x_0)] + (1 - \lambda_{\text{FE}})(\alpha_{1\text{FE}} + \alpha_{2\text{FE}})\exp[(\alpha_{1\text{FE}} + \alpha_{2\text{FE}})(x - x_0)]}{[1 + \lambda_{\text{FE}}\exp[2\alpha_{1\text{FE}}(x - x_0)] + (1 - \lambda_{\text{FE}})\exp[(\alpha_{1\text{FE}} + \alpha_{2\text{FE}})(x - x_0)]]^2} . \end{aligned} \quad (2.53)$$

对于广义分布函数 (2.48) 式及其广义分布密度函数 (2.51) 式, 简单地取 $\alpha = 0.12$ 、 $x_0 = 100$, 可得 y_{GDD} 及其 y_{GD} 函数曲线特征如图 2-1 所示, 广义数学期望 $E_{\text{GD}}(X) = 100$ 。

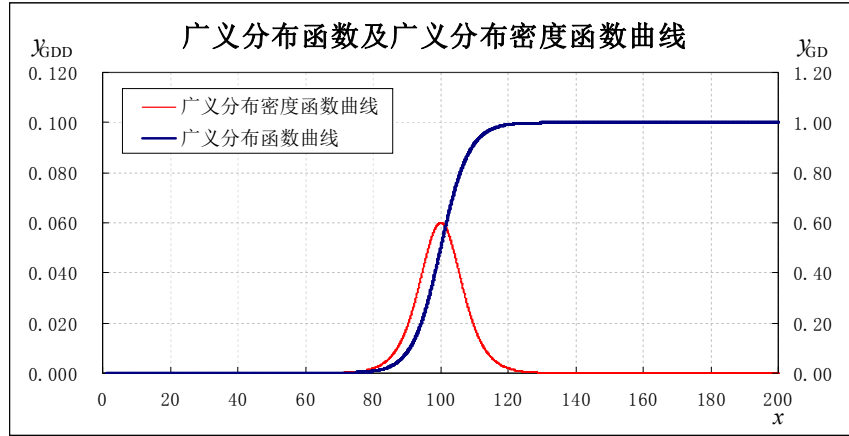


图 2-1 对称情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-1 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the symmetrical case

对于前偏对称的广义分布函数 (2.49) 式及其广义分布密度函数 (2.52) 式, 当取 $x_0 = 100$ 、 $\kappa_{\text{FE}} = 0.7$ 、 $\alpha_{1\text{FE}} = 0.06$ 、 $\alpha_{2\text{FE}} = 0.38$ 时, 可得 y_{GDDF} 及其 y_{GDF} 函数曲线特征如图 2-2 所示, $E_{\text{GD}}(X) \approx 102$ 。

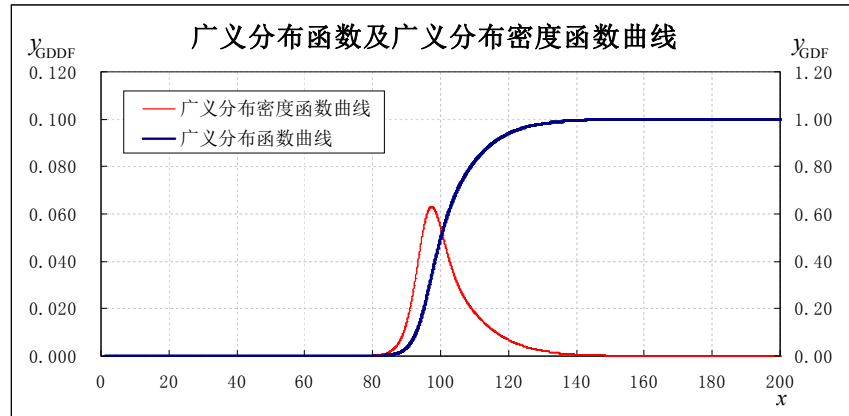


图 2-2 前偏对称情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-2 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the forward partial-symmetrical case

对于后偏对称的广义分布函数 (2.50) 式及其广义分布密度函数 (2.53) 式, 当取 $x_0 = 100$ 、 $\lambda_{\text{FE}} = 0.7$ 、 $\alpha_{1\text{FE}} = 0.075$ 、 $\alpha_{2\text{FE}} = 0.405$ 时, 可得 y_{GDDB} 及其 y_{GDB} 函数曲线特征如图 2-3 所示, $E_{\text{GD}}(X) \approx 98$ 。

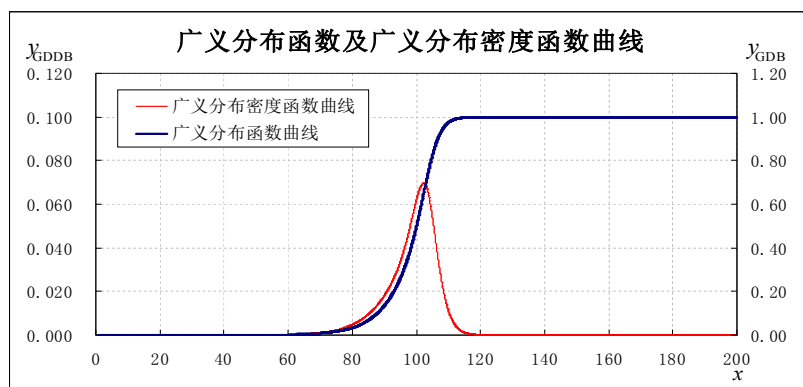


图 2-3 后偏对称情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-3 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the backward partial-symmetrical case

对于具有小幅值振荡或波动性质的广义分布密度函数 y_{GDD} ，如下面二个具体函数形式

$$y_{\text{GDD}} = [\alpha[1 - \tanh^2[\alpha(x - x_0)]] + A_1[1 + \tanh[\beta(x - x_0 + x_{01})]]\tanh[-\beta(x - x_0 - x_{01})][A_2 + \cos[\omega(x - x_{02})]]A_{\text{max}}^{-1}, \quad (2.54)$$

$$y_{\text{GDD}} = [\alpha[1 - \tanh^2[\alpha(x - x_0)]] + A_1 \exp[-\beta(x - x_{01})^2][A_2 + \cos[\omega(x - x_{02})]]A_{\text{max}}^{-1}; \quad (2.55)$$

这里 α 、 β 、 ω 、 x_0 、 x_{01} 、 x_{02} 、 A_1 、 A_2 、 A_{max} 为待定系数；且有分布函数 (2.46) 式

$$y_{\text{GD}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\text{GDD}}(t) dt, \quad y_{\text{GD}}(x \rightarrow -\infty) = 0, \quad y_{\text{GD}}(x \rightarrow +\infty) = 1.$$

由方程 (2.54) 式及 (2.46) 式，取 $\alpha = 0.05$ 、 $\beta = 0.15$ 、 $x_0 = 100$ 、 $x_{01} = 8$ 、 $x_{02} = 100$ 、 $A_1 = 0.01$ 、 $A_2 = 4.0$ ，则当 $\omega = 1.0$ 时有 $A_{\text{max}} = 3.302$ ，可得 y_{GDD} 及其 y_{GD} 函数曲线特征如图 2-4 所示，广义数学期望 $E_{\text{GD}}(X) = 100$ 。

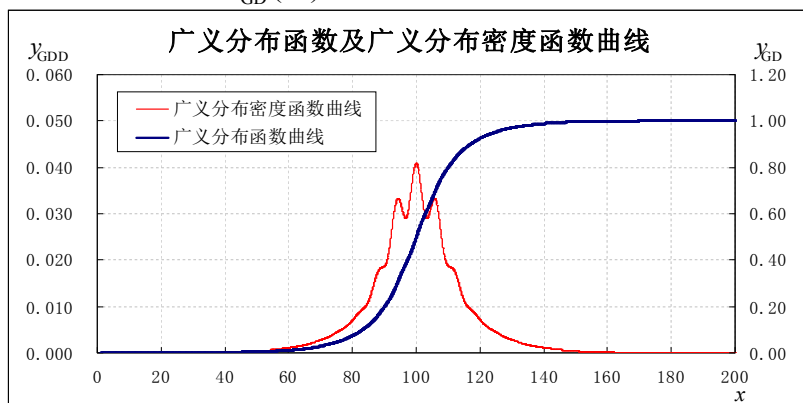


图 2-4 低频振荡情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-4 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the case of low frequency oscillation ($\omega = 1.0$)

当 $\omega = 2.0$ 时 $A_{\text{max}} = 3.302$ ，得 y_{GDD} 及其 y_{GD} 函数曲线特征如图 2-5 所示， $E_{\text{GD}}(X) = 100$ 。

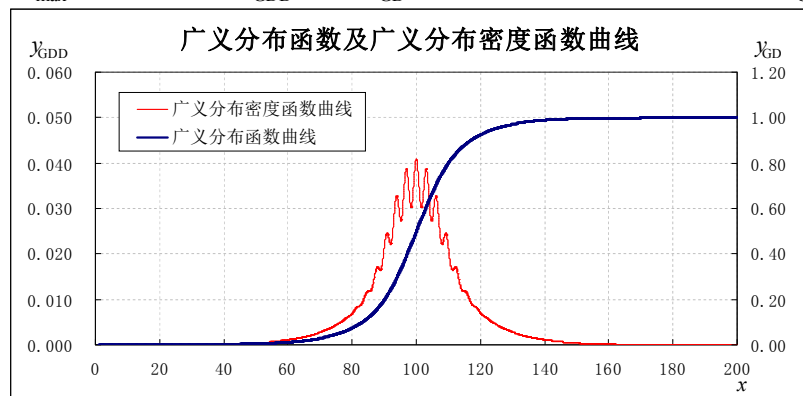


图 2-5 低频振荡情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-5 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the case of low frequency oscillation ($\omega = 2.0$)

当 $\omega = 4.0$ 时 $A_{\max} = 3.302$, 得 y_{GDD} 及其 y_{GD} 函数曲线特征如图 2-6 所示, $E_{\text{GD}}(X) = 100$ 。

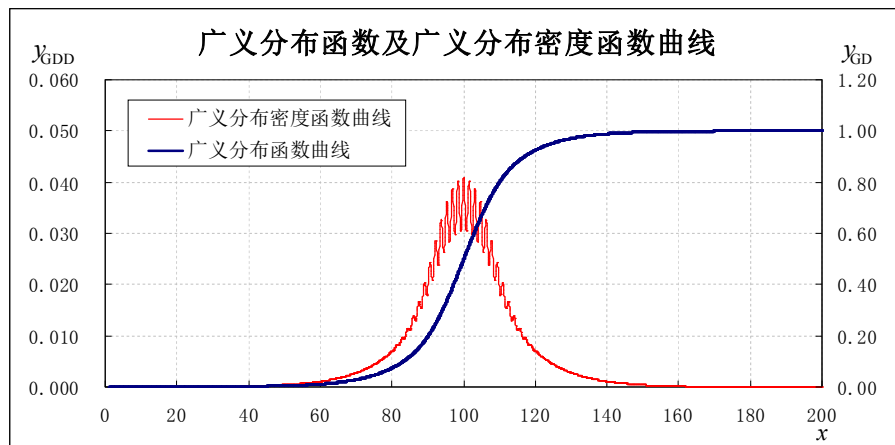


图 2-6 低频振荡情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-6 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the case of low frequency oscillation($\omega = 4.0$)

由方程(2.55)式及(2.46)式, 取 $\alpha = 0.05$ 、 $\beta = 0.01$ 、 $x_0 = 100$ 、 $A_1 = 0.02$ 、 $A_2 = 4.0$, 则当 $x_{01} = 100$ 、 $x_{02} = 100$ 、 $\omega = 3.0$ 时 $A_{\max} = 3.418$, 可得 y_{GDD} 及其 y_{GD} 函数曲线特征如图 2-7 所示, $E_{\text{GD}}(X) = 100$ 。

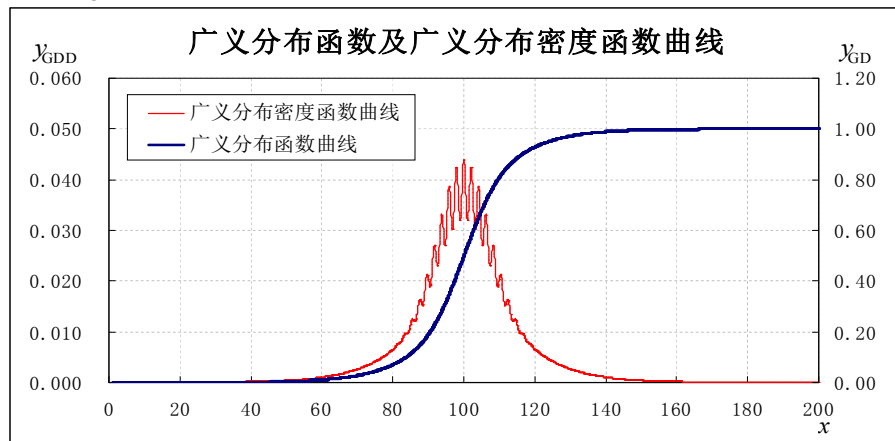


图 2-7 低频振荡情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-7 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the case of low frequency oscillation($x_{01} = 100$, $x_{02} = 100$ and $\omega = 3.0$)

当 $x_{01} = 88$ 、 $x_{02} = 95$ 、 $\omega = 3.0$ 时 $A_{\max} = 3.418$, 可得 y_{GDD} 及其 y_{GD} 函数曲线特征如图 2-8 所示; $E_{\text{GD}}(X) \approx 95.0$ 。

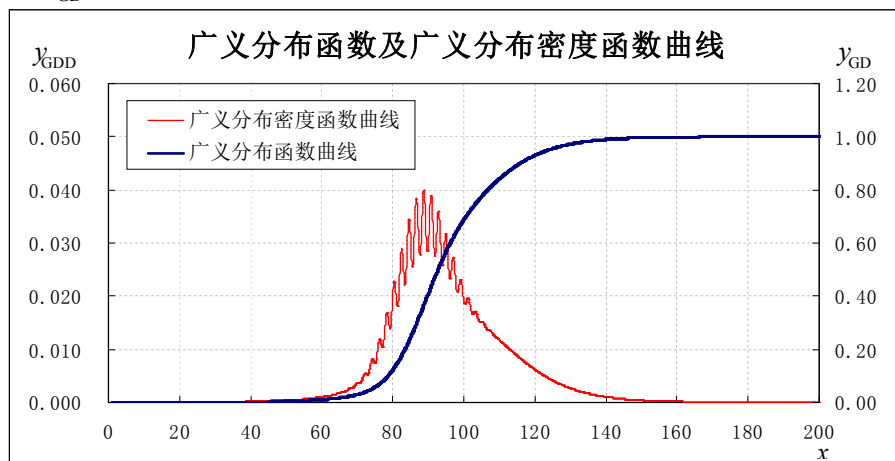


图 2-8 低频振荡情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-8 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the case of low frequency oscillation($x_{01} = 88$, $x_{02} = 95$ and $\omega = 3.0$)

当 $x_{01} = 112$ 、 $x_{02} = 105$ 、 $\omega = 3.0$ 时 $A_{\max} = 3.418$ ，得 y_{GDD} 及其 y_{GD} 函数曲线特征如图 2-9 所示， $E_{\text{GD}}(X) \approx 105$ 。

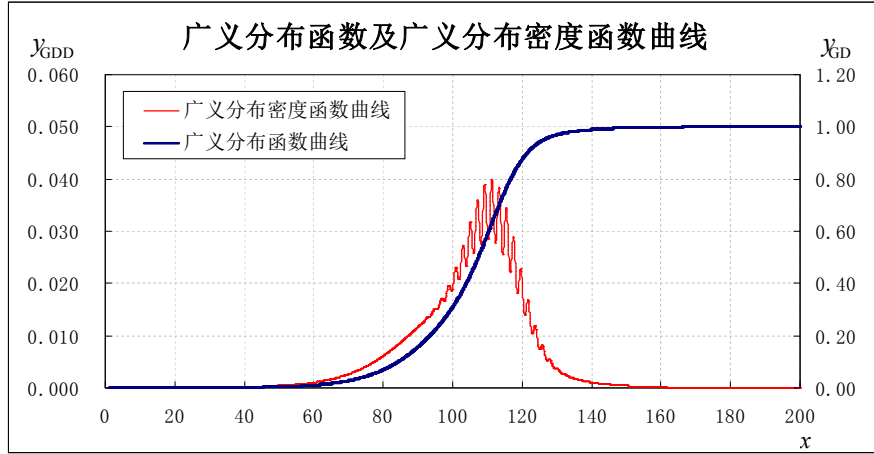


图 2-9 低频振荡情况下的广义分布函数及广义分布密度函数曲线形态图

Fig. 2-9 Curve shape figure of the general distribution function and the general distribution density function in the case of low frequency oscillation($x_{01} = 112$, $x_{02} = 105$ and $\omega = 3.0$)

上述方向将广泛的严格饱和过程方程及可转化为严格饱和过程的方程形式引入数理统计中成为广义分布函数及广义分布密度函数形式，同时亦将数理统计中分布函数及分布密度函数的理论及思想延展到自然科学及社会科学诸多领域的解析框架中并继而与之融为一体。

2.2.2 粒子系统统计分布的平均粒子数趋势性简略方程及其若干条件解

下面关于粒子系统统计分布的平均粒子数方程方面分析探讨尚不是严格解析表述，仅是唯象趋势性轮廓层面的研究，毫无疑问含有些许笼统偏颇乃至较大脱漏差池，且进一步的研究还需要对诸方程解的特性予以辨别确认，及确定其在自然现象演化过程的相应真实意义。

对于粒子系统统计分布的平均粒子数描述，在渐变连续或等效渐变连续的趋势性分析探讨方向，简单地参考方程 (1.1) 式，可初步构建绝对温度为 T 时分布在能级 E_L 上一个量子态中平均粒子数 n_s 的非线性微分方程趋势性简略形式为

$$z_d \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} + \frac{dn_s}{dn_E} + z_{IE} + n_s + z_s n_s^2 + z_c n_s^3 = z_{EE}, \quad n_s(n_E \rightarrow +\infty) = 0 \quad (2.56)$$

式中

$$n_s = n_N g_s^{-1}, \quad n_E = E_L (kT)^{-1} + \alpha_E; \quad (2.57)$$

n_N 为分布在能级 E_L 上所有量子态中的粒子数， g_s 为能级 E_L 上的量子态数， k 为 Boltzmann 常数， α_E 是与 kT 相关的统计性待定参量，为对参量 n_E 中主项 $E_L (kT)^{-1}$ 予以补充的参量，诸如在部分分布形式中包含着化学势 μ_E 项，即 $\alpha_E = -\mu_E (kT)^{-1} + \alpha_C$ ， α_C 为待定常量，绝对温度 $T > 0$ ； z_d 、 z_s 、 z_c 为待定系数， z_{IE} 为内激励函数， z_{EE} 为外激励函数。

方程 (2.56) 式旨在初步讨论绝对温度为 T 时在能级 E_L 上一个量子态中平均粒子数的趋势性分布形式，进而探讨其中部分分布形式之间的关系。

方程 (2.56) 式的适当简化形式具有极限解、波动解（或变频波动解），及极限与波动的复合解等诸多形式。一般地，线性微分方程具有解的叠加性，非线性微分方程则不具有解的叠加性，诸解性质并列、形式对称、整体互补。

对于方程 (2.56) 式，其一近似等效解析解形式为

$$n_s = A_{SE} \frac{\exp[\alpha_{SE1}(n_E - n_{E0})] - \exp[-\alpha_{SE2}(n_E - n_{E0})]}{2 \cosh[\alpha_{SE3}(n_E - n_{E0})]}, \quad (2.58)$$

式中 n_{E0} 、 $A_{SE} > 0$ 、 $\alpha_{SE1} > 0$ 、 $\alpha_{SE2} > 0$ 、 $\alpha_{SE3} > 0$ 皆为待定常量， $\alpha_{SE3} > \alpha_{SE1}$ ；一般地 $n_{E0} \leq 0$ ， $n_E > n_{E0}$ 。

方程 (2.56) 式当内激励函数与外激励函数相平衡 $z_{IE} = z_{EE}$ 时，其成为

$$z_d \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} + \frac{dn_s}{dn_E} + n_s + z_s n_s^2 + z_c n_s^3 = 0. \quad (2.59)$$

对于方程 (2.59) 式, 当 $\frac{dn_s}{dn_E} = 0$ 时, 其常数解为代数方程

$$n_s + z_s n_s^2 + z_c n_s^3 = 0$$

的三个根, 即方程 (2.59) 式的三个常数解为

$$n_s = n_{s01} = 0;$$

$$n_s = n_{s02} = -0.5z_c^{-1}[z_s - \sqrt{z_s^2 - 4z_c}],$$

$$n_s = n_{s03} = -0.5z_c^{-1}[z_s + \sqrt{z_s^2 - 4z_c}];$$

这里 $z_c \neq 0$ 。

方程 (2.59) 式当 $z_d = 0$ 、 $z_c = 0$ 时, 有

$$\frac{dn_s}{dn_E} + n_s + z_s n_s^2 = 0. \quad (2.60)$$

考虑 $n_s > 0$, 则在待定系数 $z_s = 0$ 情况下, 方程 (2.60) 式成为

$$\frac{dn_s}{dn_E} + n_s = 0, \quad (2.61)$$

有

$$\frac{1}{n_s} dn_s = -dn_E; \quad (2.62)$$

解得

$$\ln n_s = -n_E + B_1,$$

得 n_s 的解为

$$n_s = \exp[-n_E + B_1] = \frac{1}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_1)]}; \quad (2.63)$$

这里 B_1 为待定常量。

而在 $z_s \neq 0$ 情况下, 当 $z_s^{-1} + n_s > 0$ 时, 方程 (2.60) 式成为

$$\frac{1}{n_s} dn_s - \frac{1}{z_s^{-1} + n_s} d(z_s^{-1} + n_s) = -dn_E, \quad (2.64)$$

解得

$$\ln n_s - \ln[z_s^{-1} + n_s] = -n_E + B_2,$$

得 n_s 的解为

$$n_s = \frac{z_s^{-1}}{\exp[n_E - B_2] - 1} = \frac{z_s^{-1}}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_2)] - 1}; \quad (2.65)$$

这里 B_2 为待定常量。

当 $z_s^{-1} + n_s = 0$ 时, 则方程 (2.60) 式直接有 n_s 的常量解

$$n_s = -z_s^{-1}; \quad z_s < 0.$$

当 $z_s^{-1} + n_s < 0$ 时, 方程 (2.60) 式成为

$$\frac{1}{n_s} dn_s - \frac{1}{-z_s^{-1} - n_s} d(-z_s^{-1} - n_s) = -dn_E, \quad (2.66)$$

解得

$$\ln n_s - \ln[-z_s^{-1} - n_s] = -n_E + B_3;$$

进而得 n_s 的解

$$n_s = \frac{-z_s^{-1}}{\exp[n_E - B_3] + 1} = \frac{-z_s^{-1}}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_3)] + 1}; \quad (2.67)$$

这里 B_3 为待定常量。

对于方程 (2.60) 式, 当 $z_s \neq 0$ 时, 将方程转化形式为

$$\frac{dn_s}{dn_E} + z_s[n_s + 0.5z_s^{-1}]^2 - 0.25z_s^{-1} = 0; \quad (2.68)$$

则由方程 (1.4)、(1.6) 二式得方程 (2.68) 式的双曲正切函数形式解

$$\begin{aligned} n_s &= -0.5z_s^{-1} + 0.5z_s^{-1} \tanh[0.5(n_E - B_{\tanh})] \\ &= -0.5z_s^{-1} + 0.5z_s^{-1} \tanh[0.5[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_{\tanh})]], \end{aligned} \quad (2.69)$$

这里 $B_{\tanh}$ 为待定常量。

由解 (2.69) 式得

$$\begin{aligned} n_s &= 0.5z_s^{-1} [\tanh[0.5(n_E - B_{\tanh})] - 1] \\ &= 0.5z_s^{-1} \frac{-2\exp[-0.5(n_E - B_{\tanh})]}{\exp[0.5(n_E - B_{\tanh})] + \exp[-0.5(n_E - B_{\tanh})]} \\ &= \frac{-z_s^{-1}}{\exp[n_E - B_{\tanh}] + 1} \\ &= \frac{-z_s^{-1}}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_{\tanh})] + 1}; \end{aligned} \quad (2.70)$$

即解 (2.69) 式与解 (2.67) 式具有相同的形式; 由双曲正切函数 (2.69) 式表示 (2.67) 式是统计运算的经典方法之一。

方程 (2.60) 式 n_s 的条件解 (2.63)、(2.65)、(2.67) 三式中包含着待定常量 B_1 、 B_2 、 B_3 , 常量 z_s 及参量 α_E , 诸常量可与参量 α_E 联合为 $\exp[-(\alpha_E - B_1)]$ 、 $\exp(\alpha_E - B_2)$ 、 $\exp(\alpha_E - B_3)$, 常量 z_s 与参量 g_s 联合为 $z_s^{-1}g_s$, 有分布在能级 E_L 上的粒子数方程

$$n_N = \frac{g_s}{\exp[(\alpha_E - B_1)] \exp[E_L(kT)^{-1}]}; \quad (2.71)$$

$$n_N = \frac{z_s^{-1}g_s}{\exp(\alpha_E - B_2) \exp[E_L(kT)^{-1}] - 1}; \quad (2.72)$$

$$n_N = \frac{-z_s^{-1}g_s}{\exp(\alpha_E - B_3) \exp[E_L(kT)^{-1}] + 1}。 \quad (2.73)$$

上述方程 (2.63)、(2.65)、(2.67) 三式初步给出绝对温度为 T 时在能级 E_L 上一个量子态中平均粒子数的趋势性分布方程形式。作为对比, 简单地, 方程 (2.60) 式 n_s 的条件解 (2.63)、(2.65)、(2.67) 三式依次当 $z_s = 0$ 、 $\alpha_C = B_1$, $z_s = 1$ 、 $\alpha_C = B_2$, $z_s = -1$ 、 $\alpha_C = B_3$ 时, 即分别对应着已知经典的 Maxwell-Boltzmann 统计分布、Bose-Einstein 统计分布及 Fermi-Dirac 统计分布中绝对温度为 T 时在能级 E_L 上一个量子态中平均粒子数诸方程形式

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1}]}, \quad z_s = 0, \quad \alpha_C = B_1 \quad (2.74)$$

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1}] - 1}, \quad z_s = 1, \quad \alpha_C = B_2 \quad (2.75)$$

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1}] + 1}, \quad z_s = -1, \quad \alpha_C = B_3。 \quad (2.76)$$

上述分析初步表明, 作为同是方程 (2.60) 式的解析解, Maxwell-Boltzmann 统计分布方程与 Bose-Einstein 统计分布方程及 Fermi-Dirac 统计分布方程具有相并列的重要地位, 乃至更具有基础性及前导性; 三个方程内涵差别在于能量的连续与离散, 其具有相通的形式而非前者仅为后者极限条件下的平凡特例; 况且, 离散的阶段性极致即转化为另一层面的连续。

自然无限; 自然原则上不设限, 亦不以无限为限。自然界依因果循环进行状态演化, 所谓有限制的极限一般多是阶段性的局部演化趋势, 而在更为广阔的层面, 已有的有限制的极限多是特定条件下的特定趋势性表述; 是故, 诸如具有对称性的超光速运动方程、互为潜势的平均粒子数方程正负解形式等皆是值得深入研究探索的方向。

从方程 (2.60) 式解的数学对称性层面分析, 取 $n_s < 0$, 将方程 (2.62)、(2.64)、(2.66) 三式分别转化为下面三式形式

$$\begin{aligned}\frac{1}{-n_s}d(-n_s) &= -dn_E, \quad z_s = 0 \\ \frac{1}{-n_s}d(-n_s) - \frac{1}{z_s^{-1} + n_s}d(z_s^{-1} + n_s) &= -dn_E, \quad z_s^{-1} + n_s > 0 \\ \frac{1}{-n_s}d(-n_s) - \frac{1}{-z_s^{-1} - n_s}d(-z_s^{-1} - n_s) &= -dn_E, \quad z_s^{-1} + n_s < 0\end{aligned}$$

分别解得

$$\begin{aligned}\ln(-n_s) &= -n_E + B_4, \\ \ln(-n_s) - \ln[z_s^{-1} + n_s] &= -n_E + B_5, \\ \ln(-n_s) - \ln[-z_s^{-1} - n_s] &= -n_E + B_6;\end{aligned}$$

进而得方程 (2.60) 式的与正分布 ($n_s > 0$) 解析解 (2.63)、(2.65)、(2.67) 三式项对称的三个负分布 ($n_s < 0$) 解析解为

$$n_s = -\frac{1}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_4)]}, \quad (2.77)$$

$$n_s = -\frac{z_s^{-1}}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_5)] + 1}, \quad (2.78)$$

$$n_s = -\frac{-z_s^{-1}}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_6)] - 1}; \quad (2.79)$$

亦即有分别与方程 (2.74)、(2.75)、(2.76) 三式相对称的负分布解析解

$$n_s = -\frac{1}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1}]}, \quad z_s = 0, \quad \alpha_C = B_4 \quad (2.80)$$

$$n_s = -\frac{1}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1}] + 1}, \quad z_s = 1, \quad \alpha_C = B_5 \quad (2.81)$$

$$n_s = -\frac{1}{\exp[(E_L - \mu_E)(kT)^{-1}] - 1}; \quad z_s = -1, \quad \alpha_C = B_6 \quad (2.82)$$

这里 B_4 、 B_5 、 B_6 皆为待定常量。

方程 (2.60) 式有三对对称解析解 (2.63)、(2.65)、(2.67) 三式与解 (2.77)、(2.78)、(2.79) 三式, 计 6 个解析解; 直接简单地, 对比解析解 (2.63)、(2.65)、(2.67) 三式与 (2.77)、(2.78)、(2.79) 三式, 则在解的数学对称性上表明:

A 当 $z_s = 0$ 时, Maxwell-Boltzmann 统计分布方程 (2.63) 式与负的 Maxwell-Boltzmann 统计分布方程 (2.77) 式自对称;

B 当 $z_s = 1$ 时, Bose-Einstein 统计分布方程 (2.65) 式与负的 Fermi-Dirac 统计分布方程 (2.78) 式相对称;

C 当 $z_s = -1$ 时, Fermi-Dirac 统计分布方程 (2.67) 式与负的 Bose-Einstein 统计分布方程 (2.79) 式相对称。

上述这种 Bose 子 (Boson) 与 Fermi 子 (Fermion) 二种统计分布形式的数学对称性关系 (互为潜隐或潜势关系) 对于深入研究 Bose 子与 Fermi 子二者的零点能量超对称关系的背景基础、相互之间的转化机理、及其共同的原初粒子物理性质等方面都具有相应的指向及引导意义。而且同样重要的是, 上述负分布方程 ($n_s < 0$) 的部分表述形式, 对于进一步研究在负绝对温度 ($T < 0$) 时粒子数正分布方程 ($-n_s > 0$) 的部分表述形式, 也具有一定的参考意义。

上述分析亦表明, 适当探讨数理方程的潜势解或背景解, 有助于深入研究自然现象演化的多层次转化机理及部分对称性特征。

对于方程 (2.59) 式, 特别简单地, 在待定系数 $z_d \neq 0$ 、 $z_s = 0$ 、 $z_c = 0$ 时的极简略情况下, 有 n_s 的常系数线性齐次微分方程形式

$$z_d \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} + \frac{dn_s}{dn_E} + n_s = 0. \quad (2.83)$$

方程 (2.83) 式的特征方程为

$$z_d \gamma_s^2 + \gamma_s + 1 = 0;$$

其二特征根 γ_{s1} 、 γ_{s2} 分别为

$$\gamma_{s1} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4z_d}}{2z_d}, \quad \gamma_{s2} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4z_d}}{2z_d};$$

故当 $1 > 4z_d > 0$ 时 $0.25 > z_d > 0$, γ_s 有二不相等负实根 $-1 > \gamma_{s1} > -2$, $\gamma_{s2} < -2$; 当 γ_{s1} 分别为 -1.01 、 -1.1 、 -1.5 、 -1.9 时, γ_{s2} 则分别对应着 -100.51 、 -10.9 、 -3.0 、 -2.1 ; 方程 (2.83) 式的解为

$$\begin{aligned} n_s &= B_7 \exp[\gamma_{s1} n_E] + B_8 \exp[\gamma_{s2} n_E] \\ &= B_7 \exp[\gamma_{s1} [E_L (kT)^{-1} + \alpha_E]] + B_8 \exp[\gamma_{s2} [E_L (kT)^{-1} + \alpha_E]]; \end{aligned} \quad (2.84)$$

当 $4z_d = 1$ 时 $z_d = 0.25$, γ_s 有二相等负实根

$$\gamma_{s1} = \gamma_{s2} = -0.5z_d^{-1} = -2;$$

方程 (2.83) 式的解为

$$\begin{aligned} n_s &= [B_9 + B_{10} n_E] \exp[-2n_E] \\ &= [B_9 + B_{10} [E_L (kT)^{-1} + \alpha_E]] \exp[-2[E_L (kT)^{-1} + \alpha_E]]; \end{aligned} \quad (2.85)$$

当 $4z_d > 1$ 时 $z_d > 0.25$, γ_s 有二共轭复根, 复根的实部

$$\operatorname{Re} \gamma_{s1} = \operatorname{Re} \gamma_{s2} = -0.5z_d^{-1}, \quad -2 < -0.5z_d^{-1} < 0;$$

复根的虚部

$$\operatorname{Im} \gamma_{s1} = -\operatorname{Im} \gamma_{s2} = b_s = 0.5z_d^{-1} \sqrt{4z_d - 1}, \quad 1 > b_s > 0;$$

方程 (2.83) 式的解为

$$\begin{aligned} n_s &= \exp[-0.5z_d^{-1} n_E] [B_{11} \cos[b_s n_E] + B_{12} \sin[b_s n_E]] \\ &= \exp[-0.5z_d^{-1} [E_L (kT)^{-1} + \alpha_E]] [B_{11} \cos[b_s [E_L (kT)^{-1} + \alpha_E]] \\ &\quad + B_{12} \sin[b_s [E_L (kT)^{-1} + \alpha_E]]]; \end{aligned} \quad (2.86)$$

这里 B_7 、 B_8 、 B_9 、 B_{10} 、 B_{11} 、 B_{12} 皆为待定常量。

方程 (2.59) 式在 $z_s = 0$ 情况下, 当

$$\left| z_d \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} \right| \gg \left| \frac{dn_s}{dn_E} + n_s \right|, \quad |z_c n_s^3| \gg \left| \frac{dn_s}{dn_E} + n_s \right|$$

时, 其成为

$$z_d \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} + z_c n_s^3 = 0; \quad (2.87)$$

解得

$$\frac{1}{2} z_d \left(\frac{dn_s}{dn_E} \right)^2 + \frac{1}{4} z_c n_s^4 = B_{dc},$$

这里 B_{dc} 为积分常数。

当 $B_{dc} = 0$ 时, 参照解 (1.56) 式可进一步解得

$$n_s = \frac{z_d}{\mp \sqrt{-0.5z_d z_c n_E + z_d B_{dc0}}} \\ = \frac{z_d}{\mp \sqrt{-0.5z_d z_c [E_L(kT)^{-1} + \alpha_E] + z_d B_{dc0}}}, \quad (2.88)$$

这里 B_{dc0} 为积分常数。

方程 (2.59) 式在待定系数 $z_d \neq 0$ 、 $z_s \neq 0$ 、 $z_c = 0$ 情况下, 当

$$\left| z_d \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} \right| \gg \left| \frac{dn_s}{dn_E} + n_s \right|, \quad \left| z_s n_s^2 \right| \gg \left| \frac{dn_s}{dn_E} + n_s \right|$$

时, 有 n_s 的简略化趋势性微分方程

$$z_d \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} + z_s n_s^2 = 0. \quad (2.89)$$

积分上式得

$$\frac{1}{2} z_d \left[\frac{dn_s}{dn_E} \right]^2 + \frac{1}{3} z_s n_s^3 = B_{ds};$$

这里 B_{ds} 为积分常量; 当 $B_{ds} = 0$ 时, 可进一步解得

$$n_s = \frac{-6z_d z_s^{-1}}{[n_E + B_{ds0}]^2} = \frac{-6z_d z_s^{-1}}{[E_L(kT)^{-1} + \alpha_E + B_{ds0}]^2}, \quad (2.90)$$

式中 B_{ds0} 为积分常量。

方程 (2.59) 式在 $z_d = 0$ 、 $z_s = 0$ 情况下, 其成为

$$\frac{dn_s}{dn_E} + n_s + z_c n_s^3 = 0; \quad (2.91)$$

参照解 (1.59) 式的形式, 得方程 (2.91) 式的解为

$$n_s^2 = \frac{1}{\exp[2n_E - B_{lc0}] - z_c} \\ = \frac{1}{\exp[2[E_L(kT)^{-1} + \alpha_E] - B_{lc0}] - z_c}, \quad (2.92)$$

这里 B_{lc0} 为积分常数。

方程 (2.91) 式及其解 (2.92) 式当 $z_c = 0$ 时即转化为 Maxwell-Boltzmann 统计分布方程 (2.61) 式及其解 (2.63) 式的形式。

简洁意义上, 分布函数 (2.88) 式、(2.90) 式及 (2.92) 式是在经典的 Maxwell-Boltzmann 统计分布、Bose-Einstein 统计分布及 Fermi-Dirac 统计分布之外部分地验证分布方程 (2.59) 式的直接途径。上述关于粒子统计分布的方程描述及分析过程是简略趋势性及探讨性的, 而且主要考虑在外激励与内激励相平衡 $z_{IE} = z_{EE}$ 时的情况; 诸参量及方程形式也还需要深入研究予以机理层面的细节阐释解析。连续与离散是一体中相互涵容及相互转化的二个动态面向, 乃至多时主要是数理方程的分析思想所表现的形象简洁解释, 具有阶段性及层面性, 是基本属于工具性的概念, 而并非关于一体的内秉特征描述; 内秉特征超越连续与离散这种分别性划分, 亦非分别识所能延展触及。在趋势层面上, 对于更为广泛的统计分布描述, 广义偏对称方程 (1.27) 式~(1.30) 式、(1.32) 式及 (1.33) 式等表述方程形式亦具有参考意义。

科学家, 在科学的逻辑世界里按部就班地泰然度过一生应该是幸运的; 从支撑框架到交叉细节, 体系中虽隐含欠缺脱漏, 但终是瑕不掩瑜, 亦令人流连忘返, 乃至耗尽一生时光。

科学研究, 许多时或究竟不知, 或不知究竟; 究竟深密广延, 不知确为真切。科学仅是一个过程台阶, 而不是终极舞台; 实践体悟内证是人生在能够自力自主后刻不容缓的根本并行选项。定值、定解、定方程、定规律跳转、规律谱系及其演化、乃至定非定, 皆有条件劫数大限; 常数、常系数、常恒表述, 层叠映射嵌套变换无尽。根本上, 数理解析、框架体系、开宗立派, 皆属枝节清谈; 人生危脆无常, 岁月短促迅疾, 当救头衣燃想, 直入证悟程途。

2.2.3 Planck 量子方程频率区间的趋势性探讨

经典量子理论，以 Planck 能量 E_{p_i} 方程

$$E_{p_i} = ih\nu, \quad E_{p_{i+1}} - E_{p_i} = h\nu \quad (2.93)$$

及后续的 Einstein—Stern 能量 E_{ESi} 方程

$$E_{ESi} = [i + 0.5]h\nu, \quad (2.94)$$

与波粒二象性物理思想等为基础构成部分；式中 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js 为 Planck 常数， ν 为频率， $i \geq 0$ 为自然数。

方程 (2.93) 式及方程 (2.94) 式皆有 Planck 量子 E_p 方程（或能量单元方程）

$$E_p = E_{p_{i+1}} - E_{p_i} = E_{ES_{i+1}} - E_{ESi} = h\nu. \quad (2.95)$$

一般地，基于能量单元的波粒二象性比拟思想，对于从甚低频电磁波至超高频伽马射线频段，能量单元的波动性与粒子性同在，依从甚低频到超高频，能量单元的表现性质亦从波动性显著逐渐转化为粒子性显著。

下面在从甚低频电磁波至超高频伽马射线频段，主要探讨 Planck 量子方程 (2.95) 式的频率区间趋势性质。

对于 Planck 量子方程 (2.95) 式，其在频率范围方面有二个特征能量表述

$$0\text{Hz} \leq \nu < +\infty\text{Hz}; \quad E_p(\nu=0) = 0, \quad E_p(\nu \rightarrow +\infty) \rightarrow +\infty. \quad (2.96)$$

如果考虑 Planck 量子方程 (2.95) 式是具有频率范围特征的方程，则一趋势性探讨途径是考虑 Planck 量子方程为饱和或蠕变过程的一段线性（乃至是多段中的一段）近似表示。

考虑将 Planck 量子方程 (2.95) 式拓展为带有 0Hz 能量 E_{line} 的量子 E_{PE} 方程形式

$$E_{\text{PE}} = h\nu + E_{\text{line}}, \quad (2.97)$$

其线性成立的频率区间为

$$\nu \in (\nu_S, \nu_E); \quad (2.98)$$

这里 E_{line} 为频率等于 0Hz 时的能量， $E_{\text{line}} = E_{\text{PE}}(\nu=0)$ ，即为 0 频能量；零频至虚近乎道； ν_S 、 ν_E 分别为量子方程 (2.97) 式在线性开始频率过渡段的中心点、线性结束频率过渡段的中心点；即 (ν_S, ν_E) 为量子方程 (2.97) 式线性始末的二个频率过渡段中心点构成的区间。

对于量子方程 (2.97) 式，在 $\nu > 0$ 的情况下，当 $h\nu \gg E_{\text{line}}$ 时， E_{line} 的积累效应很微弱，方程 (2.97) 式也即转化为经典 Planck 量子方程 (2.95) 式的形式

$$E_{\text{PE}} \approx E_p = h\nu;$$

因此可由量子方程 (2.97) 式代替 Planck 量子方程 (2.95) 式予以频率区间的分析讨论。

一般地，能量具有测度的性质，诸如线性、可加性、可量度等；以极限、饱和或蠕变的思想，依据方程 (1.1) 式，引入广义能量 E_G ，考虑有非线性方程组的近似解方程形式

$$\varpi_1 \frac{dE_G}{d\nu} + \varpi_2 \frac{d^2 E_G}{d\nu^2} + \xi_{\text{IE}} + \xi_1 E_G + \xi_2 E_G^2 + \xi_3 E_G^3 = \psi_{\text{EE}}, \quad (2.99)$$

这里 ϖ_1 、 ϖ_2 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 皆为系函数； ξ_{IE} 为内激励函数， ψ_{EE} 为外激励函数； ξ_2 、 ξ_3 是具有非线性极限特征的函数；此方程亦为多段 $E_G(\nu)$ 过程中一阶段性子过程的趋势描述。

在极限、饱和或蠕变过程的曲线层面上，对于方程 (2.99) 式，考虑其一近似等效解析解形式为 (1.19) 式的表述形式

$$E_G = E_{G0} + A \frac{\exp[\alpha_1(\nu - \nu_0)] - \exp[-\alpha_2(\nu - \nu_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(\nu - \nu_0)]}; \quad (2.100)$$

式中 α_1 、 α_2 、 α_3 、 A 为待定系数， ν_0 为频率常数， $E_G(\nu = \nu_0) = E_{G0}$ 。

方程 (2.100) 式当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha > 0$ 时，即简化为 (2.99) 式的一条件解析解形式

$$E_G = E_{G0} + A \tanh[\alpha(\nu - \nu_0)]. \quad (2.101)$$

由方程 (2.100) 式、(2.101) 式，得在 ν_0 附近的区域线性方程分别为

$$\begin{aligned} E_G &\approx E_{G0} + 0.5A[[1 + \alpha_1(\nu - \nu_0)] - [1 - \alpha_2(\nu - \nu_0)]] \\ &= 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2)\nu + E_{G0} - 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2)\nu_0; \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$E_G = A\alpha\nu + E_{G0} - A\alpha\nu_0. \quad (2.103)$$

将方程 (2.102) 式与 (2.103) 式与量子方程 (2.97) 比较, 相应地即有 Planck 常数 h 及能量 E_{line} 的近似表示分别为

$$h \approx 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2), \quad E_{\text{line}} \approx E_{G0} - 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2)v_0; \quad (2.104)$$

$$h \approx A\alpha, \quad E_{\text{line}} \approx E_{G0} - A\alpha v_0. \quad (2.105)$$

其中简单近似地, 在方程 (2.101) 式中, 其有二个特征能量表述

$$E_G(v=0) = E_{\text{Cline}} = E_{G0} - A \tanh[\alpha v_0], \quad E_G(v \rightarrow +\infty) = E_{\text{lim}} = E_{G0} + A; \quad (2.106)$$

式中 E_{Cline} 为当曲线方程时频率等于 0Hz 时的能量, $E_{\text{Cline}} = E_G(v=0)$; E_{lim} 为频率趋于无穷时 (即 $v \rightarrow +\infty$) 的能量表示。

上述方程中的能量 E_{G0} 及能量 E_{Cline} 即为与另一层面诸如结构性质等相关的能量方程形式, 诸如与初始测度 M_0 及维数 D 相关, 即

$$E_{G0} = E_{G0}(M_0, D); \quad E_{\text{Cline}} = E_{\text{Cline}}(M_0, D). \quad (2.107)$$

进一步地, 关于 E_{G0} 及 E_{Cline} 的数值量级及更为深刻的物理内涵, 也同样是需要进一步研究探讨确认的。给出量子方程 (2.97) 式的频率范围 (v_s, v_E) , 尤其是在量子化频率低端的过渡段中心点 v_s , 在目前应该还是比较迫切的。频率范围 (v_s, v_E) 与能量 E_{Cline} 及 E_{lim} 密切联系; 作为初步展望, 当量子方程 (2.97) 式的频率区间一趋势性探讨估计范围初步为

$$(v_{\text{ps}}, v_{\text{pe}}) \approx (10^6 \text{ Hz}, 10^{40} \text{ Hz}) \quad (2.108)$$

时, 得频率比值近似为 $v_{\text{ps}}v_{\text{pe}}^{-1} \approx 10^{-34}$, 此与 Planck 常数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 的数值量级相当; 则相应地有能量 E_{Cline} 与 E_{lim} 的数值量级初步估计范围分别为

$$0 \leq E_{\text{Cline}} < 10^{-28} \text{ J}; \quad E_{\text{lim}} > 10^6 \text{ J}. \quad (2.109)$$

考虑量子方程 (2.97) 式中 $E_{\text{line}} \geq 0$, 则当以饱和过程的广义能量方程 E_G 探讨量子方程 (2.97) 式 E_{pe} 的频率趋势性区间时, 有

$$\begin{cases} E_G \geq E_{\text{pe}}, & 0 \leq v \leq v_s \\ E_G = E_{\text{pe}}, & v_s < v < v_E \\ E_G < E_{\text{pe}}, & v \geq v_E \end{cases} \quad (2.110)$$

而以蠕变过程的广义能量方程 E_G 探讨量子方程 (2.97) 式中 E_{pe} 的频率趋势性区间时, 则相应地有

$$\begin{cases} E_G \leq E_{\text{pe}}, & 0 \leq v \leq v_s \\ E_G = E_{\text{pe}}, & v_s < v < v_E \\ E_G > E_{\text{pe}}, & v \geq v_E \end{cases} \quad (2.111)$$

这里关于量子方程 (2.97) 式的频率区间讨论是属于试错及引导性质的, 并未触及现有量子理论的根基。Planck 量子方程 (2.95) 式, 与 Newton 引力定律等开创性研究一样, 属于构造层面的成就, 并兼具解析及计算展开, 在物理学领域无论怎样强调其重要意义, 都是不过的。对于 Planck 量子方程, 在十分慎重的同时, 宜开展多角度、多层面的深入探讨。

在主导或主项规律描述层面, Planck 量子方程有频率适用范围, Newton 引力定律有星系适用规模。突破现有理论或对理论推进的标志是, 一方面引进更普适的常数 γ_0 , 建立更基础的方程组, 解释并预言更广泛的现象演化过程, 包括相邻量子间的连接关系及作用机理、物质分割构造的阶段极限及状态转化, 解析开 Planck 量子常数 h 及 Newton 引力常数 G_N , 即

$$h = h(\gamma_0), \quad G_N = G_N(\gamma_0); \quad (2.112)$$

另一方面, 通过开辟创建新的数学描述方法, 给出 Planck 量子方程与 Newton 引力定律背后的统一构架, 依凭数学方程的逻辑延展性及构造开放性给出更为普适的解析刻画及具体预言。

这二个方面都比较重要, 也都需要相应的哲学思想作为背景支撑; 若能将这二个方面复合, 使得 Planck 量子方程与 Newton 引力定律成为新理论的特殊或极限形式, 则毫无疑问是对量子理论及引力理论的重大突破或推进, 同时亦能够在哲学层面加深对自然的理解; 此集新物理思想及新数学方法于一体的理论, 将是趋近可与 Newton 数学原理相比肩的卓越成就。

在机械论方向, 连续是可以由离散单元的组合予以描述的, 而离散单元本身又具有连续的属性; 阶跃具有连续的特征, 连续具有可分割的性质; 在同一层面上线性是非线性的特例, 而在跨层面上某一层面的非线性又是另一层面线性的近似表述。

上述关于以饱和或蠕变过程的广义能量方程探讨量子方程的频率趋势性区间, 其存在诸多脱漏及不严谨之处, 仅为将来进一步给出解析及机理层面的分析提供前期参照。

2.3 非线性微分方程的趋势性近似变频波动解形式及近似等效解析解法的局限性

对于方程 (1.1) 式

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi_{IE} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = \psi_{EE},$$

当其为常系数微分方程的经典 Newton 动力学方程形式时, 其波动或振荡特征主要由 ϖ_1 、 ϖ_2 及 ξ_1 的关系 $\varpi_1^2 < 4\xi_1\varpi_2$ 确定, 波动频率为 $0.5\varpi_2^{-1}\sqrt{4\xi_1\varpi_2 - \varpi_1^2}$ 、衰减系数为 $0.5\varpi_1\varpi_2^{-1}$ 。

当描述的现象演化过程为变频波动时, 则方程 (1.1) 式中 ϖ_1 、 ϖ_2 及 ξ_1 需为相应的函数形式。可同时将 ϖ_1 、 ϖ_2 及 ξ_1 表示为函数形式, 也可仅将其中的二项或一项表示为函数形式; 如果仅将 ξ_1 表示为函数形式, 由于没有直接涉及到微分量, 故还不易获得近似变频解表述。

通过对具有近似变频波动解的非线性动力学微分方程的研究, 可以对包括变频波动解在内的诸多方程解或近似解予以分析, 探讨诸解的性质及表述形式之间的条件转化。作为对变频波动方程导引性质的讨论, 下面初步给出具有近似线性变频解的非线性微分方程形式。

较为朴素直接地, 依照近似等效解析解方法, 将难以求解的非线性微分方程简化为存在解析解的线性或非线性微分方程, 将该解析解拓展为原非线性微分方程的初始近似等效解析解形式, 通过将此初始近似解原非线性微分方程中试算, 在趋势层面近似求得初始近似解中关键特征系数与原微分方程中有关常数间的关系表达式; 然后对初始近似解予以适当修正, 再代入到原微分方程中试算, 如此进行修正代入循环, 确定最终近似等效解析解具体形式。

与解微分方程的 Lagrange 参数变易法比较, 近似等效解析解法是趋势性的近似方法, 通常情况下并不能给出非线性微分方程的解析解, 而仅是给出其近似等效解析解。

一般地, 当近似等效解析解较为远离原微分方程的内涵特征、或近似解的函数形式过于简单时, 则不能完全求出近似解中系数与原微分方程中常量的关系, 其中包括部分系数出现多表达式的现象。特别地, 当近似等效解析解的函数性质相对原微分方程的内涵特征过于复杂或超覆盖时, 则仍不容易求出近似解中全部系数与原微分方程中诸常量的关系表达式。

非线性微分方程的近似等效解析解方法, 其简化的线性微分方程形式、由线性微分方程解析解推论出近似等效解析解的拓展方向、近似等效解析解代回原非线性微分方程予以对应计算时所进行的取舍近似这三步运算, 使得近似等效解析解函数形式一般仅是侧重了原非线性微分方程的部分性质而非全部内涵特征, 是一种趋势性近似求解途径; 是故, 将近似等效解析解代入到原微分方程中进行对应性计算, 许多时会产生部分系数的不相容多表达式现象, 不能全部确定近似解中系数与原微分方程中常数间的对应关系表达式; 即使是唯一表达式, 也是趋势性近似关系; 这是微分方程近似等效解析解法所固有的缺点不足及局限性。

作为探讨, 在逆方向上, 特别地, 可应用微分方程近似等效解析解法, 由变频波动解确定微分方程的具体形式, 随后再讨论微分方程诸解的性质。

由方程 (1.1) 式, 当 $\xi_2 = 0$ 、 $\xi_3 = 0$, $\psi_{EE} - \xi_{IE} = b_0$ 时, 有简单形式

$$\varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \varpi_1 \frac{dy}{dx} + \xi_1 y = b_0, \quad (2.113)$$

这里 b_0 为常量。

当方程 (2.113) 式中 ϖ_1 、 ϖ_2 及 ξ_1 均为常量, 即其为常系数微分方程的经典 Newton 动力学方程形式时, 则其在 $\varpi_1^2 < 4\xi_1\varpi_2$ 情况下有波动解

$$y = J_1 + J_2 \exp(J_3 x) \cos[J_4(x - x_0)], \quad (2.114)$$

式中 J_1 为趋势系数, J_2 为波动幅度系数, J_3 为波动幅度放大 (或衰减) 系数, J_4 为频率量, x_0 为初始相位; J_3 、 J_4 分别为

$$J_3 = -0.5\varpi_1\varpi_2^{-1}, \quad J_4 = 0.5\varpi_2^{-1}\sqrt{4\varpi_2\xi_1 - \varpi_1^2}. \quad (2.115)$$

下面在主要考虑方程 (2.113) 式于最简单的线性变频波动情况下的近似等效解析解性质。将常微分方程解析解 (2.114) 式在趋势层面拓展为方程 (2.113) 式的线性变频波动解形式

$$y = J_1 + J_2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)], \quad (2.116)$$

式中 J_5 为线性变频系数。

将线性变频波动解 (2.116) 式代入到线性微分方程 (2.113) 式中, 确定 ϖ_1 、 ϖ_2 及 ξ_1 的函数形式; 有展开式

$$\begin{aligned}
 & \xi_1 y + \varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \\
 &= \xi_1 J_1 + \xi_1 J_2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &+ \varpi_1 J_2 J_3 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &- \varpi_1 J_2 [J_4 - J_5 x_0] \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &- 2\varpi_1 J_2 J_5 x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &+ \varpi_2 J_2 J_3^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &- 2\varpi_2 J_2 J_3 [J_4 - J_5 x_0] \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &- 4\varpi_2 J_2 J_3 J_5 x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &- 2\varpi_2 J_2 J_5 \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &- \varpi_2 J_2 [J_4 - J_5 x_0]^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &- 4\varpi_2 J_2 J_5 [J_4 - J_5 x_0] x \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
 &- 4\varpi_2 J_2 J_5^2 x^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]。 \quad (2.117)
 \end{aligned}$$

对于 b_0 项及 $\exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]$ 和 $\exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]$ 组合, 有 3 个对应方程分别为

$$\xi_1 J_1 = b_0, \quad (2.118)$$

$$[\xi_1 J_2 + \varpi_1 J_2 J_3 + \varpi_2 J_2 J_3^2 - \varpi_2 J_2 [J_4 - J_5 x_0]^2 - 4\varpi_2 J_2 J_5 [J_4 - J_5 x_0] x - 4\varpi_2 J_2 J_5^2 x^2]^2 = 0, \quad (2.119)$$

$$[-\varpi_1 J_2 [J_4 - J_5 x_0] - 2\varpi_1 J_2 J_5 x - 2\varpi_2 J_2 J_3 [J_4 - J_5 x_0] - 4\varpi_2 J_2 J_3 J_5 x - 2\varpi_2 J_2 J_5]^2 = 0; \quad (2.120)$$

即得 ϖ_1 、 ϖ_2 及 ξ_1 的函数形式为

$$\xi_1 = \frac{b_0}{J_1}, \quad (2.121)$$

$$\varpi_1 = -\frac{\xi_1}{J_3} \left[1 + \frac{[J_3^2 - [J_4 - J_5 x_0]^2 - 4J_5 [J_4 - J_5 x_0] x - 4J_5^2 x^2][J_4 - J_5 x_0 - 2J_5 x]}{2J_3 [J_3 [J_4 - J_5 x_0] + J_5 + 2J_3 J_5 x]} \right]^{-1}, \quad (2.122)$$

$$\varpi_2 = -\xi_1 \left[\frac{J_3^2 - [J_4 - J_5 x_0]^2 - 4J_5 [J_4 - J_5 x_0] x - 4J_5^2 x^2}{J_4 - J_5 x_0 - 2J_5 x} + \frac{2J_3 [J_3 [J_4 - J_5 x_0] + J_5 + 2J_3 J_5 x]}{J_4 - J_5 x_0 - 2J_5 x} \right]^{-1}。 \quad (2.123)$$

当线性变频系数 $J_5 = 0$ 时, 有 ϖ_1 、 ϖ_2 的常量形式分别为

$$\varpi_1 = -\frac{2\xi_1 J_3}{3J_3^2 - J_4^2}, \quad (2.124)$$

$$\varpi_2 = -\frac{\xi_1}{3J_3^2 - J_4^2}。 \quad (2.125)$$

可见在逆方向上, 由变频波动解可以确定微分方程形式, 但实际上由于给出的微分方程具体形式比较复杂, 故此逆方向的方法一般不是很可取。

下面仍然讨论方程 (1.1) 式在近似线性变频波动解方向的性质。

对于方程 (1.1) 式, 在考虑 ξ_1 、 ϖ_2 均为常量, $\xi_2 = 0$ 、 $\xi_3 = 0$ 、 $\varpi_1 = \kappa_0 + \kappa_1 y$ 、 $\psi_{EE} - \xi_{IE} = b_0 + b_1 x$ 时的情况下, 有简单的基本类同于方程 (1.8) 式的非线性微分方程形式为

$$\xi_1 y + (\kappa_0 + \kappa_1 y) \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = b_0 + b_1 x, \quad (2.126)$$

这里 κ_0 、 κ_1 、 b_0 、 b_1 均为常量。

对于方程 (2.126) 式, 其具有双曲正切解 ($\xi_1 = 0$ 、 $\varpi_2 \neq 0$)、波动解 ($\xi_1 \neq 0$ 、 $\varpi_2 \neq 0$) 等诸多条件解。其中在波动分析方向将方程 (2.126) 式简化为常系数的经典 Newton 动力学方程

$$\xi_1 y + \kappa_0 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = b_0 + b_1 x, \quad (2.127)$$

该常系数微分方程在 $\kappa_0^2 < 4\varpi_2 \xi_1$ 时的波动解析解为

$$y = J_0 + J_1 x + J_2 \exp(J_3 x) \cos[J_4(x - x_0)], \quad (2.128)$$

这里 J_0 、 J_1 为趋势系数, J_2 为波动幅度系数, J_3 为波动幅度放大 (或衰减) 系数, J_4 为频率量, x_0 为初始相位; $J_3 = -0.5\kappa_0\varpi_2^{-1}$, $J_4 = 0.5\varpi_2^{-1}\sqrt{4\varpi_2\xi_1 - \kappa_0^2}$ 。

在主要考虑方程 (2.126) 式于近似线性变频波动情况下的等效解析解性质时, 将方程 (2.127) 式的解析解 (2.128) 式在趋势层面拓展为方程 (2.126) 式的初始近似线性变频波动解

$$y = J_0 + J_1 x + J_2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)], \quad (2.129)$$

式中 J_5 为线性变频系数。

下面在趋势层面主要确定近似解 (2.129) 式中变频系数 J_5 与非线性微分方程 (2.129) 式中常量 κ_1 间一次试算后的近似关系; 运算过程同时也显示了近似等效近似解法的显著不足之处。

对于非线性微分方程 (2.129) 式, 将初始近似等效解析解 (2.129) 式代入其中, 得展开式

$$\begin{aligned} & \xi_1 y + (\kappa_0 + \kappa_1 y) \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \\ &= \xi_1 J_0 + \xi_1 J_1 x + \xi_1 J_2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &+ [\kappa_0 + \kappa_1 J_0 + \kappa_1 J_1 x + \kappa_1 J_2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]] \\ &\quad \times [J_1 + J_2 J_3 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - J_2 [J_4 - J_5 x_0] \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - 2J_2 J_5 x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &+ \varpi_2 J_2 J_3^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - \varpi_2 J_2 J_3 [J_4 - J_5 x_0] \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - 2\varpi_2 J_2 J_3 J_5 x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - \varpi_2 J_2 J_3 [J_4 - J_5 x_0] \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - \varpi_2 J_2 [J_4 - J_5 x_0]^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - 2\varpi_2 J_2 [J_4 - J_5 x_0] J_5 x \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - 2\varpi_2 J_2 J_5 \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - 2\varpi_2 J_2 J_3 J_5 x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - 2\varpi_2 J_2 J_5 [J_4 - J_5 x_0] x \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\ &\quad - 4\varpi_2 J_2 J_5^2 x^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]; \end{aligned} \quad (2.130)$$

即有

$$\begin{aligned}
& \xi_1 y + (\kappa_0 + \kappa_1 y) \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \\
&= \xi_1 J_0 + \xi_1 J_1 x + \xi_1 J_2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad + [\kappa_0 + \kappa_1 J_0] J_1 + [\kappa_0 + \kappa_1 J_0] J_2 J_3 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - [\kappa_0 + \kappa_1 J_0] J_2 [J_4 - J_5 x_0] \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - 2[\kappa_0 + \kappa_1 J_0] J_2 J_5 x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad + \kappa_1 J_1^2 x + \kappa_1 J_1 J_2 J_3 x \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - \kappa_1 J_1 J_2 [J_4 - J_5 x_0] x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - 2\kappa_1 J_1 J_2 J_5 x^2 \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad + \kappa_1 J_1 J_2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad + \kappa_1 J_2^2 J_3 \exp(2J_3 x) \cos^2[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - 0.5\kappa_1 J_2^2 [J_4 - J_5 x_0] \exp(2J_3 x) \sin[2(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - \kappa_1 J_2^2 J_5 x \exp(2J_3 x) \sin[2(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad + \varpi_2 J_2 J_3^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - 2\varpi_2 J_2 J_3 [J_4 - J_5 x_0] \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - 4\varpi_2 J_2 J_3 J_5 x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - 2\varpi_2 J_2 J_5 \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - \varpi_2 J_2 [J_4 - J_5 x_0]^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - 4\varpi_2 J_2 J_5 [J_4 - J_5 x_0] x \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)] \\
&\quad - 4\varpi_2 J_2 J_5^2 x^2 \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]。 \tag{2.131}
\end{aligned}$$

特别地，作为对近似等效解析解法中代入展开式部分在极限条件下关于理想解析解的简单验证，当常量 $\kappa_1 = 0$ 及线性变频系数 $J_5 = 0$ 时，方程 (2.131) 式成为常系数微分方程展开形式

$$\begin{aligned}
& \xi_1 y + \kappa_0 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \\
&= \xi_1 J_0 + \xi_1 J_1 x + \xi_1 J_2 \exp(J_3 x) \cos[J_4(x - x_0)] \\
&\quad + \kappa_0 J_1 + \kappa_0 J_2 J_3 \exp(J_3 x) \cos[J_4(x - x_0)] \\
&\quad - \kappa_0 J_2 J_4 \exp(J_3 x) \sin[J_4(x - x_0)] \\
&\quad + \varpi_2 J_2 J_3^2 \exp(J_3 x) \cos[J_4(x - x_0)] \\
&\quad - 2\varpi_2 J_2 J_3 J_4 \exp(J_3 x) \sin[J_4(x - x_0)] \\
&\quad - \varpi_2 J_2 J_4^2 \exp(J_3 x) \cos[J_4(x - x_0)]。 \tag{2.132}
\end{aligned}$$

由方程 (2.126) 式及展开式 (2.132) 式，对于 $b_0 + b_1 x$ 项，有 2 个对应方程为

$$\xi_1 J_0 + \kappa_0 J_1 = b_0, \tag{2.133}$$

$$\xi_1 J_1 = b_1; \tag{2.134}$$

同时对于 $\exp(J_3 x) \cos[J_4(x - x_0)]$ 和 $\exp(J_3 x) \sin[J_4(x - x_0)]$ 组合，有 2 个对应方程

$$[\xi_1 J_2 + \kappa_0 J_2 J_3 + \varpi_2 J_2 J_3^2 - \varpi_2 J_2 J_4^2]^2 = 0, \tag{2.135}$$

$$[-\kappa_0 J_2 J_4 - 2\varpi_2 J_2 J_3 J_4]^2 = 0。 \tag{2.136}$$

由方程 (2.133)、(2.134) 二式解得系数

$$J_0 = \frac{b_0 - \kappa_0 J_1}{\xi_1} = \frac{\xi_1 b_0 - \kappa_0 b_1}{\xi_1^2}; \quad (2.137)$$

$$J_1 = \frac{b_1}{\xi_1}. \quad (2.138)$$

将对应方程 (2.135) 式、(2.136) 式在 $J_2 \neq 0$ 、 $J_4 \neq 0$ 时化简得

$$\xi_1 + \kappa_0 J_3 + \varpi_2 J_3^2 - \varpi_2 J_4^2 = 0, \quad (2.139)$$

$$\kappa_0 + 2\varpi_2 J_3 = 0; \quad (2.140)$$

由方程 (2.139)、(2.140) 二式得系数

$$J_3 = -\frac{\kappa_0}{2\varpi_2}; \quad (2.141)$$

$$J_4 = \pm \sqrt{\frac{1}{\varpi_2} [\xi_1 + \kappa_0 J_3 + \varpi_2 J_3^2]} = \pm \frac{1}{2\varpi_2} \sqrt{4\varpi_2 \xi_1 - \kappa_0^2}. \quad (2.142)$$

系数表达式 (2.137)、(2.138)、(2.141)、(2.142) 四式即为解析解 (2.128) 式中诸系数表示, 上述 (2.132) 式~(2.142) 式为确定微分方程解析解具体形式的普通解法, 亦是对近似等效解析解法中展开式部分在极限条件下关于理想解析解具体形式的简单验证。

当常量 $\kappa_1 \neq 0$ 及线性变频系数 $J_5 \neq 0$ 时, 由方程 (2.126) 式及展开式 (2.131) 式, 对于 $b_0 + b_1 x$ 项, 有 2 个对应方程为

$$\xi_1 J_0 + (\kappa_0 + \kappa_1 J_0) J_1 = b_0, \quad (2.143)$$

$$\xi_1 J_1 + \kappa_1 J_1^2 = b_1; \quad (2.144)$$

同时在 $4J_5^2 x^2 \ll [1 - J_5 x_0]^2$ 及略去诸高阶项时, 对于 $\exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]$ 和 $\exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]$ 组合, 及 $x \exp(J_3 x) \cos[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]$ 和 $x \exp(J_3 x) \sin[(J_4 + J_5 x)(x - x_0)]$ 组合, 有 4 个近似对应方程

$$[\xi_1 J_2 + (\kappa_0 + \kappa_1 J_0) J_2 J_3 + \kappa_1 J_1 J_2 + \varpi_2 J_2 J_3^2 - \varpi_2 J_2 (J_4 - x_0 J_5)^2]^2 = 0, \quad (2.145)$$

$$[-(\kappa_0 + \kappa_1 J_0) J_2 (J_4 - x_0 J_5) - 2\varpi_2 J_2 J_3 (J_4 - x_0 J_5) - 2\varpi_2 J_2 J_5]^2 = 0, \quad (2.146)$$

$$[\kappa_1 J_1 J_2 J_3 - 4\varpi_2 J_2 (J_4 - x_0 J_5) J_5]^2 = 0, \quad (2.147)$$

$$[-2(\kappa_0 + \kappa_1 J_0) J_2 J_5 - \kappa_1 J_1 J_2 (J_4 - x_0 J_5) - 4\varpi_2 J_2 J_3 J_5]^2 = 0. \quad (2.148)$$

由方程 (2.144) 式解得

$$J_1 = \frac{-\xi_1 \pm \sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1}}{2\kappa_1};$$

可取其中之一解得

$$J_1 = \frac{-\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1}}{2\kappa_1}, \quad J_1(b_1 = 0) = 0 \quad (2.149)$$

由 (2.143) 式、(2.149) 式解得

$$J_0 = \frac{b_0 - \kappa_0 J_1}{\xi_1 + \kappa_1 J_1} = \frac{2b_0 \kappa_1 + \kappa_0 [\xi_1 - \sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1}]}{\kappa_1 [\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1}]}. \quad (2.150)$$

对于方程 (2.145) 式~(2.148) 式, 皆与线性变频系数 J_5 及常量 κ_1 相关, 在 $J_2 \neq 0$ 时 J_2 可约除, 4 个方程中的 3 个方程所得系数表达式一般不完全满足余下的方程, 这是由于解的简单程度、拓展方向及代入运算组合省略有关高次项等原因形成的。

其中方程 (2.146) 式~ (2.148) 式在 $J_2 \neq 0$ 时可简化为

$$(\kappa_0 + \kappa_1 J_0 + 2\varpi_2 J_3)(J_4 - x_0 J_5) + 2\varpi_2 J_5 = 0, \quad (2.151)$$

$$\kappa_1 J_1 J_3 - 4\varpi_2 (J_4 - x_0 J_5) J_5 = 0, \quad (2.152)$$

$$2(\kappa_0 + \kappa_1 J_0) J_5 + \kappa_1 J_1 (J_4 - x_0 J_5) + 4\varpi_2 J_3 J_5 = 0. \quad (2.153)$$

由方程 (2.152) 式得近似关系

$$J_4 - x_0 J_5 = \frac{\kappa_1 J_1 J_3}{4\varpi_2 J_5}; \quad (2.154)$$

将方程 (2.154) 式代入到方程 (2.151)、(2.153) 二式得

$$\kappa_1 J_1 J_3 (\kappa_0 + \kappa_1 J_0 + 2\varpi_2 J_3) + 8\varpi_2^2 J_5^2 = 0, \quad (2.155)$$

$$8\varpi_2 (\kappa_0 + \kappa_1 J_0) J_5^2 + \kappa_1^2 J_1^2 J_3 + 16\varpi_2^2 J_3 J_5^2 = 0; \quad (2.156)$$

有系数 J_3 的代数方程

$$[\kappa_0 + \kappa_1 J_0 + 2\varpi_2 J_3]^2 - \varpi_2 \kappa_1 J_1 = 0; \quad (2.157)$$

解得系数 J_3 近似为

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{-(\kappa_0 + \kappa_1 J_0) \pm \sqrt{\varpi_2 \kappa_1 J_1}}{2\varpi_2} \\ &= -\frac{1}{2\varpi_2} \left[\kappa_0 + \frac{2b_0 \kappa_1 + \kappa_0 [\xi_1 - \sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1}]}{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1}} \mp \sqrt{0.5\varpi_2 [\sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1} - \xi_1]} \right] \\ &= -\frac{1}{2\varpi_2} \left[\frac{2[\kappa_1 b_0 + \kappa_0 \xi_1]}{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1}} \mp \sqrt{0.5\varpi_2 [\sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1} - \xi_1]} \right]; \end{aligned} \quad (2.158)$$

由方程 (2.158)、(2.155) 二式即得一次试算后近似等效解析解 (2.129) 式中线性变频系数 J_5 与微分方程 (2.126) 式中常量 κ_1 的近似关系方程为

$$\begin{aligned} J_5 &= \pm \frac{(\kappa_1 J_1)^{3/4}}{4\varpi_2^{5/4}} \sqrt{\pm [(\kappa_0 + \kappa_1 J_0) \mp \sqrt{\varpi_2 \kappa_1 J_1}]} \\ &= \pm \frac{[\sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1} - \xi_1]^{3/4}}{8\varpi_2} \sqrt{\pm \left[\frac{2\sqrt{2}[\kappa_1 b_0 + \kappa_0 \xi_1]}{\sqrt{\varpi_2} [\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1}]} \mp \sqrt{[\sqrt{\xi_1^2 + 4\kappa_1 b_1} - \xi_1]} \right]}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

由近似关系 (2.159) 式, 当常量 $\kappa_1 \rightarrow 0$ 时, 有线性变频系数

$$J_5 \rightarrow \pm \frac{\sqrt{\pm 2\kappa_0}}{4\varpi_2^{5/4}} [\kappa_1 \xi_1^{-1} b_1]^{3/4} \rightarrow 0; \quad (2.160)$$

由 (2.158) 式, 得此时的衰减系数亦趋近于 Newton 动力学常微分方程解 (2.128) 式中的系数形式 ((2.141) 式)

$$J_3 \rightarrow -\frac{1}{2\varpi_2} [\kappa_0 \mp \sqrt{\varpi_2 \kappa_1 \xi_1^{-1} b_1}] \rightarrow -\frac{\kappa_0}{2\varpi_2}. \quad (2.161)$$

对于方程 (1.1) 式, 在考虑 ϖ_1 、 ξ_1 、 ξ_2 均为常量, $\xi_1 \neq 0$, $\xi_3 = 0$ 、 $\varpi_2 = \varepsilon_0(1 + \varepsilon_1 x)$ 的情况下, 有较方程 (2.126) 式更为简单的非线性微分方程形式

$$\varepsilon_0(1 + \varepsilon_1 x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \varpi_1 \frac{dy}{dx} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 = b_0 + b_1 x, \quad (2.162)$$

或者考虑 ϖ_2 、 ξ_1 、 ξ_2 均为常量, $\varpi_1 = \eta_0(1 + \eta_1 x)$ 时的非线性微分方程形式

$$\varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \eta_0(1 + \eta_1 x) \frac{dy}{dx} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 = b_0 + b_1 x, \quad (2.163)$$

以及在不考虑双曲正切函数时, 方程 (2.162)、(2.163) 二式可进一步简化为线性微分方程

$$\varepsilon_0(1 + \varepsilon_1 x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \varpi_1 \frac{dy}{dx} + \xi_1 y = b_0 + b_1 x, \quad (2.164)$$

$$\varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \eta_0(1 + \eta_1 x) \frac{dy}{dx} + \xi_1 y = b_0 + b_1 x; \quad (2.165)$$

上述 4 个方程的波动解都具有变频特性; 这里 ε_0 、 ε_1 、 η_0 、 η_1 、 b_0 、 b_1 均为常量。

对于 (2.162) 式~ (2.165) 式, 可取与 (2.127) 式同类型的初始近似等效解析解形式

$$y = H_0 + H_1 x + H_2 \exp(-H_3 x) \sin[H_4(1 + H_5 x)(x - x_0)], \quad (2.166)$$

这里 H_0 、 H_1 为趋势系数, H_2 为波动幅度系数, H_3 为波动幅度衰减系数, H_4 为频率量, H_5 为线性变频比例系数; x_0 为初始相位。

其中, 将近似等效解析解 (2.166) 式代入到方程 (2.162) 式中, 一次试算后得 H_5 的代数方程

$$[x_0^2 \varepsilon_1 \varpi_1 + 4\varepsilon_0] H_5^2 - 2x_0 \varepsilon_1 \varpi_1 H_5 + \varepsilon_1 \varpi_1 = 0; \quad (2.167)$$

可得近似等效近似解 (2.166) 式中线性变频比例系数 H_5 与线性微分方程 (2.162) 式中常量 ε_1 的一趋势性近似关系为

$$\begin{aligned} H_5 &= \frac{2x_0 \varepsilon_1 \varpi_1 \pm \sqrt{[2x_0 \varepsilon_1 \varpi_1]^2 - 4\varepsilon_1 \varpi_1 [x_0^2 \varepsilon_1 \varpi_1 + 4\varepsilon_0]}}{2[x_0^2 \varepsilon_1 \varpi_1 + 4\varepsilon_0]} \\ &= \frac{x_0 \varepsilon_1 \varpi_1 \pm 2\sqrt{-\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varpi_1}}{x_0^2 \varepsilon_1 \varpi_1 + 4\varepsilon_0}; \end{aligned} \quad (2.168)$$

当常量 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 时, 线性衰减系数 H_3 及变频比例系数 H_5 则分别为

$$H_3 = 0.5\varpi_1 \varepsilon_0^{-1} + H_5[1 - x_0 H_5]^{-1} \rightarrow 0.5\varpi_1 \varepsilon_0^{-1}; \quad H_5 \rightarrow 0. \quad (2.169)$$

将近似等效近似解 (2.166) 式代入到 (2.165) 式中, 一次试算后得 H_5 的代数方程

$$[x_0^2 \eta_0 \eta_1 - 4\varpi_2] H_5^2 - 2x_0 \eta_0 \eta_1 H_5 + \eta_0 \eta_1 = 0; \quad (2.170)$$

可得近似等效近似解 (2.166) 式中线性变频比例系数 H_5 与线性微分方程 (2.165) 式中常量 η_1 的一趋势性近似关系为

$$\begin{aligned} H_5 &= \frac{2x_0 \eta_0 \eta_1 \pm \sqrt{[2x_0 \eta_0 \eta_1]^2 - 4\eta_0 \eta_1 [x_0^2 \eta_0 \eta_1 - 4\varpi_2]}}{2[x_0^2 \eta_0 \eta_1 - 4\varpi_2]} \\ &= \frac{x_0 \eta_0 \eta_1 \pm 2\sqrt{\eta_0 \eta_1 \varpi_2}}{x_0^2 \eta_0 \eta_1 - 4\varpi_2}; \end{aligned} \quad (2.171)$$

当常量 $\eta_1 \rightarrow 0$ 时, 衰减系数 H_3 及线性变频比例系数 H_5 则分别为

$$H_3 = 0.5\eta_0 \varpi_2^{-1} + H_5[1 - x_0 H_5]^{-1} \rightarrow 0.5\eta_0 \varpi_2^{-1}; \quad H_5 \rightarrow 0. \quad (2.172)$$

上述分析过程亦同样适用于类如近似等效变频波动解

$$y = H_0 + H_1 x + H_2 \exp(-H_3 x) \sin[H_4 \exp[H_5 x](x - x_0)], \quad (2.173)$$

$$y = H_0 + H_1 x + H_2 \exp(-H_3 x) \sin[H_4 \sin[H_5 x](x - x_0)], \quad (2.174)$$

等形式的性质讨论; 这里 H_0 、 H_1 、 H_2 、 H_3 及 x_0 的含义仍同于 (2.166) 式, H_4 、 H_5 均为常量系数。

应用近似等效解析解法, 由于在解的简化程度、拓展方向、代入原微分方程后组合运算时有所省略、修正试算循环次数少等原因, 未能反映原微分方程全部内涵特征, 故一般仅能给出解中部分系数在趋势层面的近似式, 且有些系数与常量间的关系偏差较大, 如方程

(2.154) 式中 J_4 的近似表示、方程 (2.159) 式中系数 J_5 与常量 b_1 的关系、方程 (2.168) 式中系数 H_5 与常量 ϖ_1 的关系、方程 (2.171) 式中系数 H_5 与常量 η_1 的关系等, 尤其当解较为简单时 (如 (2.129) 式) 还存在系数多表达式的现象 (如联立 (2.145) 式), 表明微分方程的近似等效解析解法仅是趋势性近似方法, 尚不具有严格解析意义。

2.4 变频波动方程在负频率与正频率转折零点附近区域的曲线形态特征

对于方程 (2.128) 式, 将其拓展较为一般的变频波动方程形式

$$y = \varsigma_0 + \varsigma_1 x + \varsigma_2 \exp(\varsigma_3 x) \sin[\varsigma_\omega(x - x_0)], \quad (2.175)$$

这里 ς_0 、 ς_1 为趋势系数, ς_2 为波动幅度系数, ς_3 为波动幅度放大或衰减系数, ς_ω 为频率函数, x_0 为初始相位。

其中对于频率量, 在进行频谱分析时, 会出现负频率; 在约定周期运动旋转方向的正负后, 也会出现负频率; 在方程 (2.142) 式中, 自然解出负频率表述; 但一般都缺少对正频率与负频率之间转化时变频波动方程的曲线形态特征描述。

如果频率呈现递减变化, 在临近 0 值频率后, 当频率继续递减时, 则趋势上自然会出现负频率。在数学描述方面, 负频率符合逻辑推演规律; 在物理意义阐释方面, 负频率还需要深入持续地做些研究工作, 尤其是与有关自然现象演化过程密切结合, 对变频波动描述方法不断修正补充完善, 应是值得探索的重要方向。

下面基于变频波动方程 (2.175) 式讨论频率变化对曲线的影响, 尤其是在负频率与正频率之间转化时变频波动曲线的形态特征, 表明负频率具有与正频率基本等同的重要性。

当变频波动方程 (2.175) 式的频率呈线性与指数函数 (即 (2.173) 式) 增加, 从正频率到正频率时, 可分别取其二具体形式为

$$y = [1.5 + 0.013x] + 1.9 \exp(-0.032x) \sin[\varsigma_\omega(x - 10)], \quad (2.176)$$

这里 $\varsigma_{\omega 1} = 0.002 + 0.0032x$, $\varsigma_{\omega 2} = 0.002 \exp[0.046x]$; 方程曲线特征如图 2-10 所示。

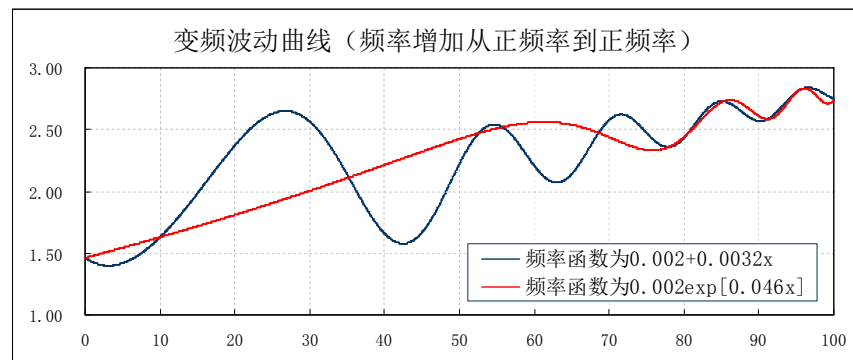


图 2-10 频率依线性与指数函数增加从正频率到正频率时的变频波动方程曲线形态图

Fig. 2-10 Curve shape figure of linear and exponential function increase of frequency from the positive frequency to other positive frequency of the variable frequency wave equations

当方程 (2.175) 式的频率呈线性增加, 从负频率到正频率时, 可取其一具体形式为

$$y = [6.2 + 0.027x] + 6.2 \exp(-0.022x) \sin[\varsigma_\omega(x - 16)], \quad (2.177)$$

这里 $\varsigma_\omega = -0.30 + 0.005x$, $\varsigma_\omega(x = 60.0) = 0$; 方程曲线特征如图 2-11 所示; 此曲线在 0~52 之间的跌宕起伏过程类似于美国 Gartner 公司给出的“技术成熟度曲线 (The hype cycle)”, 在 0~22 之间的前峰亦若《左传》中对王朝帝国演替描述的“其兴也勃焉”、“其亡也忽焉”。世间正业得成于忍, 贵在坚持, 恒心始终; 正奇联纵, 虚实变换, 创造命运。

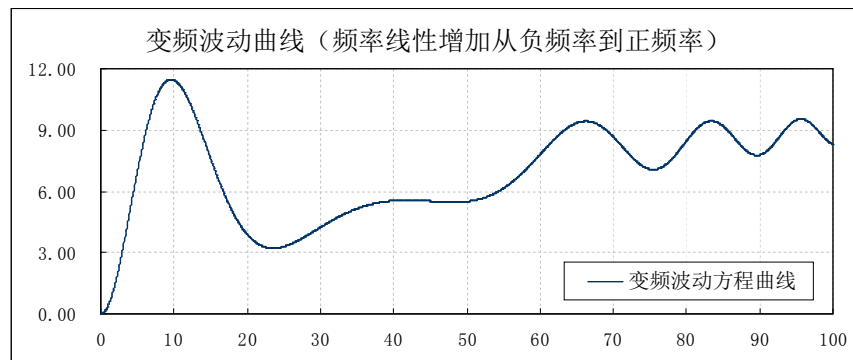


图 2-11 频率线性增加从负频率到正频率时的变频波动方程曲线形态图

Fig. 2-11 Curve shape figure of linear increase of frequency from the negative frequency to the positive frequency of the variable frequency wave equation

当 (2.175) 式的频率呈线性与指数函数减少, 从正频率到正频率时, 取二具体形式为

$$y = [1.7 + 0.016x] + 1.4\exp(-0.018x)\sin[\zeta_{\omega}(x - 10)], \quad (2.178)$$

这里 $\zeta_{\omega 1} = 0.6 - 0.0035x$, $\zeta_{\omega 2} = 0.6\exp[-0.0070x]$; 方程曲线形态特征如图 2-12 所示。

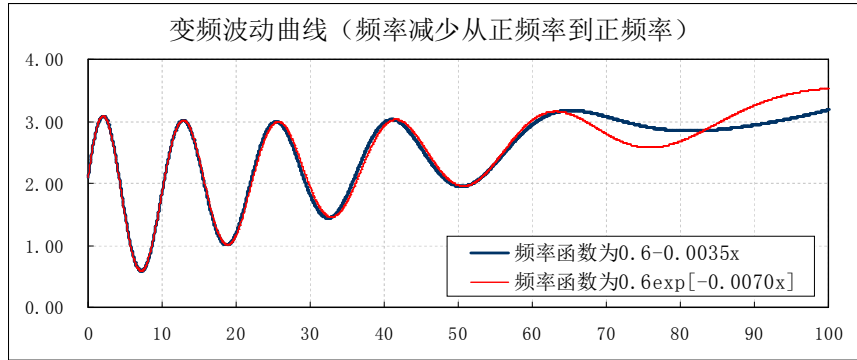


图 2-12 频率依线性与指数函数减少从正频率到正频率时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-12 Curve shape figure of linear and exponential function decreasing of frequency from the positive frequency to other positive frequency of the variable frequency wave equations

当变频方程 (2.175) 式的频率呈线性减少, 从正频率到负频率时, 可取一具体形式为

$$y = [1.5 + 0.018x] + 1.4\exp(-0.013x)\sin[\zeta_{\omega}(x - 20)], \quad (2.179)$$

这里 $\zeta_{\omega} = 0.3 - 0.0048x$, 频率零点 $\zeta_{\omega}(x = 62.50) = 0$; 方程曲线形态特征如图 2-13 所示。

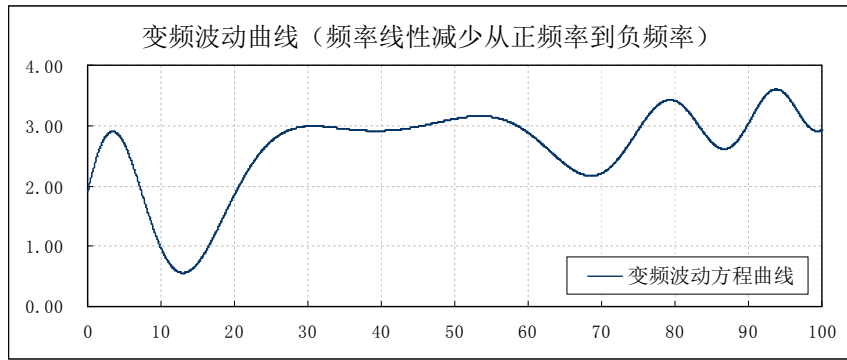


图 2-13 频率线性减少从正频率到负频率时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-13 Curve shape figure of linear decreasing of frequency from the positive frequency to the negative frequency of the variable frequency wave equation

当变频方程 (2.175) 式的频率呈线性减少, 从负频率到负频率时, 可取一具体形式为

$$y = [1.5 + 0.018x] + 1.4\exp(-0.013x)\sin[\zeta_{\omega}(x - 10)], \quad (2.180)$$

这里频率函数 $\zeta_{\omega} = -0.1 - 0.00252x$; 由方程 (2.180) 式亦得

$$\begin{aligned} y &= [1.5 + 0.018x] + 1.4\exp(-0.013x)\sin[(0.1 + 0.00252x)(x - 10) - \pi] \\ &\approx [1.5 + 0.018x] + 1.4\exp(-0.013x)\sin[(0.1462 + 0.00252x)(x - 28.33)]; \end{aligned} \quad (2.181)$$

即负频率在减少时, 等效为频率线性增加从正频率到正频率; 方程特性曲线如图 2-14 所示。

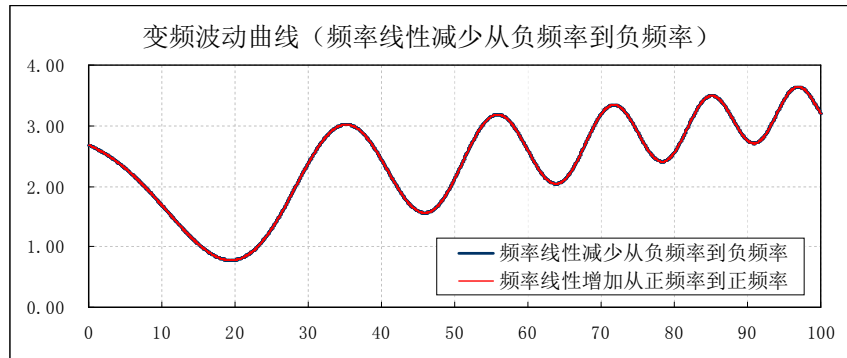


图 2-14 频率线性减少从负频率到负频率时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-14 Curve shape figure of linear decreasing of frequency from the negative frequency to other negative frequency of the variable frequency wave equation

当方程 (2.175) 式的频率从 0 值到一正常量频率呈现非线性变化时, 可取具体形式为

$$y = [1.5 + 0.011x] + 1.4 \exp(-0.025x) \sin[\zeta_{\omega}(x-10)], \quad (2.182)$$

这里 $\zeta_{\omega_1} = 0.15[1 + \tanh[0.3(x-30)]]$, $\zeta_{\omega_2} = 0.15[1 + \tanh[2.0(x-30)]]$; 方程曲线如图 2-15 所示。对波动分项, 因不同频率、不同性质的波在介质中传播速度差异, 使得在诸如天然地震及人工爆破振动等的初始阶段 (初始震相) 既有单频起振, 也有等效变频起振过程。

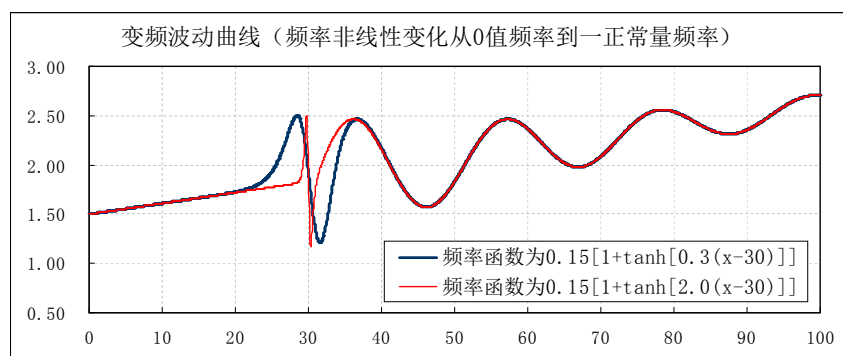


图 2-15 频率非线性变化从 0 值频率到一正常量频率时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-15 Curves shapes figure of nonlinear variation of frequency from a value frequency of 0 to a positive constant frequency of the variable frequency wave equations

当方程 (2.175) 式的频率从 0 值经正频率再到 0 值非线性变化时, 可取其具体形式为

$$y = [1.5 + 0.011x] + 0.9 \exp(-0.02x) \sin[\zeta_{\omega}(x-10)], \quad (2.183)$$

这里 $\zeta_{\omega_1} = 0.3[\tanh[0.4(x-30)] - \tanh[0.4(x-70)]]$,

$\zeta_{\omega_2} = 0.3[\tanh[1.5(x-30)] - \tanh[1.5(x-70)]]$; 方程曲线形态特征如图 2-16 所示。

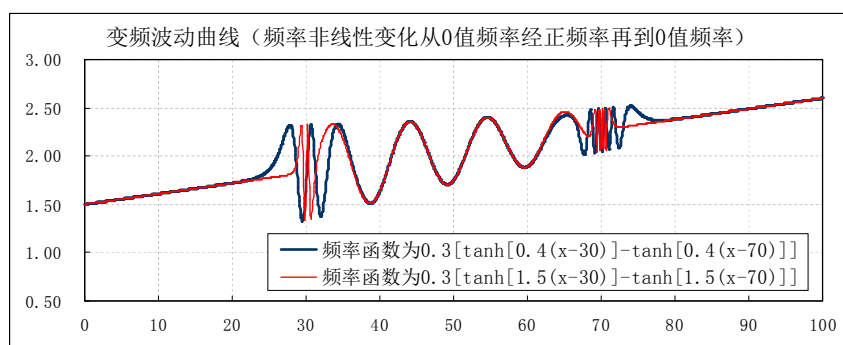


图 2-16 频率非线性变化从 0 值频率经正频率到 0 值频率时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-16 Curves shapes figure of nonlinear variation of frequency from a value frequency of 0 through a positive frequency to a value frequency of 0 of the variable frequency wave equations

当变频波动方程 (2.175) 式的频率呈现非线性变化, 从一负常量频率到一正常量频率时, 可取其二个具体形式为

$$y = [1.5 + 0.011x] + 0.9 \exp(-0.02x) \sin[\zeta_{\omega}(x-10)], \quad (2.184)$$

这里 $\zeta_{\omega_1} = 0.4 \tanh[0.2(x-50)]$, $\zeta_{\omega_2} = 0.4 \tanh[1.2(x-50)]$, 频率零点 $\zeta_{\omega}(x=50.0) = 0$; 方程曲线形态特征如图 2-17 所示; 可见在 0 值频率转换点附近的过渡区存在较高频率振荡。

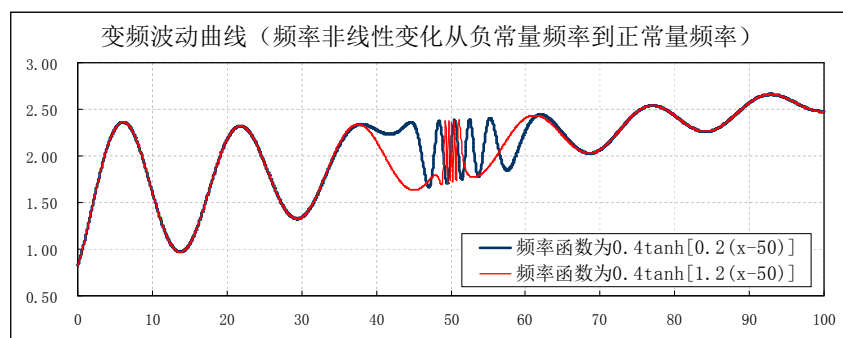


图 2-17 频率非线性变化从一负常量频率到一正常量频率时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-17 Curves shapes figure of nonlinear variation of frequency from a negative constant frequency to a positive constant frequency of the variable frequency wave equations

当变频波动方程 (2.175) 式的频率呈现非线性变化, 从一正频率经负频率再到正频率时, 可取其一具体形式为

$$y = [1.5 + 0.011x] + 0.9\exp(-0.02x)\sin[\zeta_{\omega}(x-10)], \quad (2.185)$$

这里 $\zeta_{\omega 1} = 0.5[\tanh[0.4(x-30)]\tanh[0.4(x-70)]-0.5]$,

$\zeta_{\omega 2} = 0.5[\tanh[1.5(x-30)]\tanh[1.5(x-70)]-0.5]$; 方程曲线形态特征如图 2-18 所示。

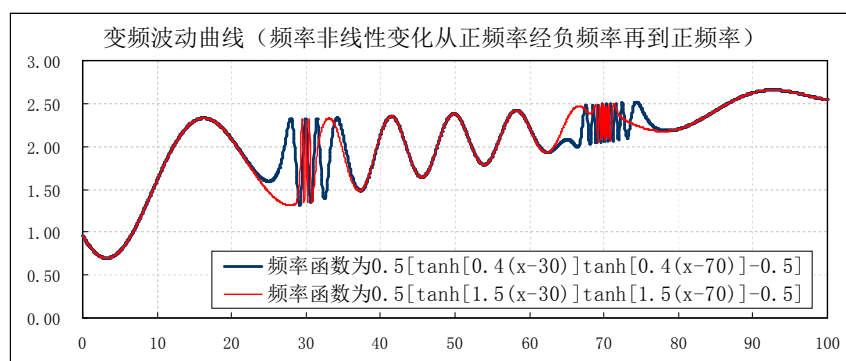


图 2-18 频率非线性变化从正频率经负频率到正频率时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-18 Curves shapes figure of nonlinear variation of frequency from the positive frequency through the negative frequency to other positive frequency of the variable frequency wave equations

当波动方程 (2.175) 式的频率呈现非线性变化, 从一负频率经正频率再到负频率时, 可取其一具体形式为

$$y = [1.5 + 0.011x] + 0.9\exp(-0.02x)\sin[\zeta_{\omega}(x-10)]; \quad (2.186)$$

这里 $\zeta_{\omega 1} = 0.5[\tanh[0.4(x-30)]-\tanh[0.4(x-70)]-0.5]$,

$\zeta_{\omega 2} = 0.5[\tanh[1.5(x-30)]-\tanh[1.5(x-70)]-0.5]$; 方程曲线特征如图 2-19 所示。

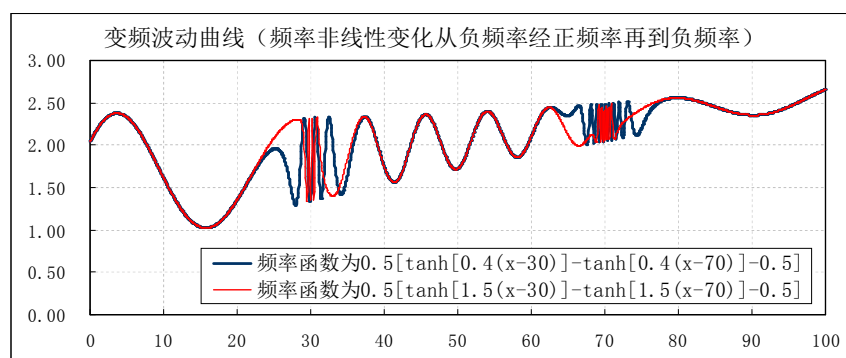


图 2-19 频率非线性变化从负频率经正频率到负频率时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-19 Curves shapes figure of nonlinear variation of frequency from the negative frequency through the positive frequency to other negative frequency of the variable frequency wave equations

当 (2.175) 式的频率在正频率与负频率间振荡时 (即 (2.174) 式), 可取其具体形式为

$$y = [1.5 + 0.011x] + 0.9\exp(-0.02x)\sin[\zeta_{\omega}(x-10)], \quad (2.187)$$

这里频率函数 $\zeta_{\omega} = 0.15\sin[0.6x]$; 方程曲线形态特征如图 2-20 所示。

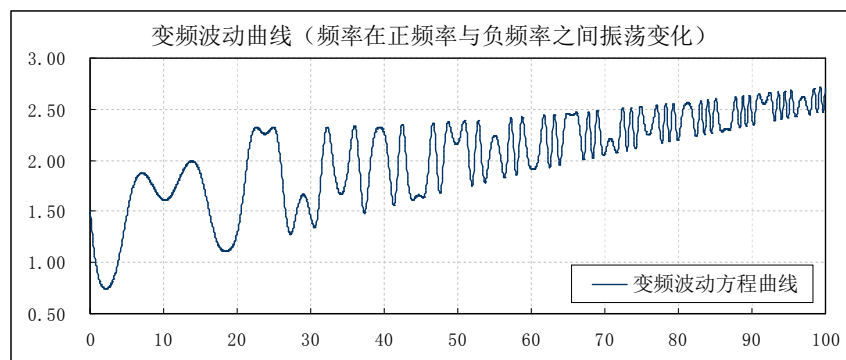


图 2-20 频率在正频率与负频率之间振荡变化时的变频波动方程曲线形态图
Fig. 2-20 Curve shape figure of oscillation changes of the frequency between positive and negative frequencies of the variable frequency wave equation

2.5 数据库理论基础的三位一体模式

采用诸如上述非线性动力学方程 (1.1) 式或趋势性连接方程 (1.19) 式及其拓展的广义偏对称方程 (1.27) 式~ (1.30) 式、方程 (1.32) 式及方程 (1.33) 式等表述形式对数据进行分析运算及对曲线进行拟合处理, 皆是基于原始数据或基础数据; 由动态的原始数据库或基础数据库总结出其中部分参量数据演化的动态趋势方程, 再由趋势方程导出理论数据以对基础数据库相应参量进行骨架数据或主线数据描述、对缺失数据予以补充, 进而给出适当的短程预言及长程趋势预言, 生成动态的理论数据库或解析数据库, 然后将解析数据库反馈给基础数据库进行比照综合研究, 修正趋势方程形式、乃至构造新的方程模型及进行多参量的联立趋势方程组研究, 形成趋势方程模型库, 继而建立解析数据库群, 进行多参量、多层面的描述、预言; 即数据库理论基础的一种至为简洁的构成模式为:

A 以基础数据库为集成本源 (简称数本);

B 以趋势方程库为变换驱动 (简称数机);

C 以解析数据库为指引反馈 (简称数智);

动态开放自适应循环反馈补充及阶段性半解析延展预测, 三库联动, 本机智融合三位一体, 为国家部分参量指标的顶层设计及决策提供依据, 此是数据库理论基础构架的一种简洁有效模式。

对于基础数据库与解析数据库之间的趋势方程库, 源于基础数据库, 导出解析数据库, 具有承前启后的转换映射作用; 其中趋势方程库中的方程形式及其系数, 将由基础数据库内容的更替扩充与解析数据库预言对比而随之相应调整; 对于基础数据库, 在充分考虑各参量数据间联系的同时, 从纷繁的数据中确定简单有效的参量关系及演化机理, 明确具体方程中诸系数的物理内涵以进行相应的动力学层面上长程趋势性预测计算, 并从而给出多变量的动力学演化方程, 自适应生成稳健特征的解析数据库, 仍是值得深入研究的。

上述连接转换基础数据库与解析数据库的趋势方程库中单变量趋势性方程有多种表述, 其中方程 (1.1) 式及其近似等效解析解 (1.19) 式及其拓展的广义偏对称方程 (1.27) 式~ (1.30) 式、方程 (1.32) 式及方程 (1.33) 式等表述即为具体形式, 较为适用于数据库中参量演化的饱和过程与蠕变过程趋势性描述及预言。

在单变量趋势描述层面, 对于理想极限过程, 诸如一个国家年度能源消费总量数据 E 与年度 GDP 数据 G 之间在趋势上可由方程 (1.19) 式、甚至是方程 (1.1) 式的非线性动力学方程形式予以近似描述

$$\varpi_{EG1} \frac{dE}{dG} + \varpi_{EG2} \frac{d^2 E}{dG^2} + \xi_{EGIE} + \xi_{EG1} E + \xi_{EG2} E^2 + \xi_{EG3} E^3 = \psi_{EGEE}, \quad (2.188)$$

式中 ϖ_{EG1} 、 ϖ_{EG2} 、 ξ_{EG1} 、 ξ_{EG2} 、 ξ_{EG3} 为系函数; ξ_{EGIE} 、 ψ_{EGEE} 分别为内、外激励函数; $E(G \rightarrow 0) \rightarrow 0$ 。

方程 (2.188) 式具有阶段性极限 (或阶段性饱和) 与局部波动相复合的性质。

较为简单地, 在平滑波动的情况下, 当系函数 $\xi_{EG2} = 0$ 、 $\xi_{EG3} = 0$ 时, 方程 (2.188) 式成为

$$\varpi_{EG1} \frac{dE}{dG} + \varpi_{EG2} \frac{d^2 E}{dG^2} + \xi_{EG1} E = \psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}; \quad (2.189)$$

进一步地, 当 $\varpi_{EG2} \neq 0$ 时, 方程 (2.189) 式转化为

$$\frac{d^2 E}{dG^2} + p_{EG} \frac{dE}{dG} + q_{EG} E = f_{EG}, \quad (2.190)$$

式中 $p_{EG} = \varpi_{EG1} \varpi_{EG2}^{-1}$, $q_{EG} = \xi_{EG1} \varpi_{EG2}^{-1}$, $f_{EG} = [\psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}] \varpi_{EG2}^{-1}$; $E(G \rightarrow 0) \rightarrow 0$ 。

当 $\varpi_{EG2} = 0$ 时, 方程 (2.189) 式直接转化为更简单的形式

$$\varpi_{EG1} \frac{dE}{dG} + \xi_{EG1} E = \psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}; \quad (2.191)$$

则当 ϖ_{EG1} 、 ξ_{EG1} 、 $\psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}$ 为常量时, 其一条件解为

$$E = \xi_{EG1}^{-1} [\psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}] [1 - \exp[-\xi_{EG1} \varpi_{EG1}^{-1} G]] = E_{\lim} [1 - \exp[-\alpha_{EG} G]], \quad (2.192)$$

式中 $\alpha_{EG} = \xi_{EG1} \varpi_{EG1}^{-1}$, $E_{\lim} = \xi_{EG1}^{-1} [\psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}]$ 为 E 的极限特征值。

例如对于美国从 1860 年到 2006 年间合计 147 组的年度 GDP 数据（1990 年 GK 10 亿美元）及能源消费总量数据（油当量，百万吨），数据曲线形态特征如图 2-21 所示，方程 (2.191) 式及其解 (2.192) 式的具体简略趋势性参考形式分别为

$$\frac{dE}{dG} + 2.60 \times 10^{-4} E = 0.7241, \quad (2.193)$$

$$E = 2785[1 - \exp[-2.60 \times 10^{-4} G]]; \quad (2.194)$$

其曲线形态如图 2-21 所示；方程与所拟合数据之间的相关系数为 0.9956。

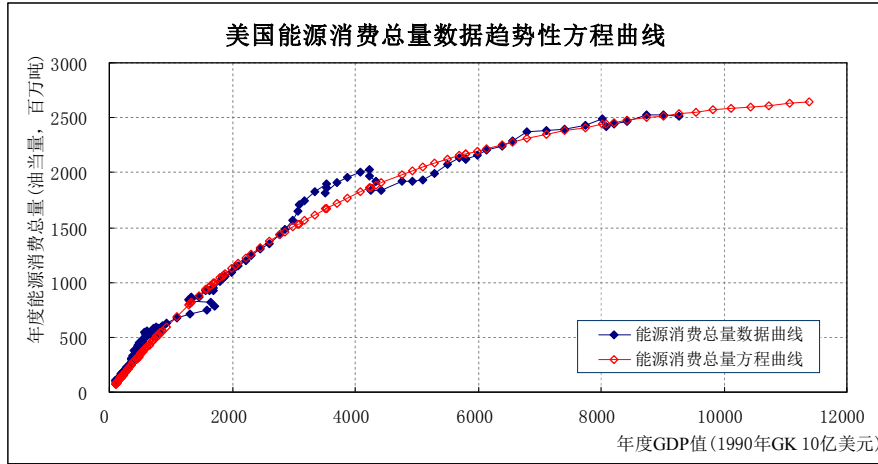


图 2-21 美国年度能源消费总量趋势性方程曲线图

Fig. 2-21 Curve figure of tendency fitting equation of the total annual energy consumption in the United States

方程 (2.194) 式表明美国阶段性的年度能源消费总量趋势性极限特征值 E_{USlim} 为

$$E_{USlim} = 2785 \text{ (百万吨油当量)}; \quad (2.195)$$

在此阶段性极限值之后，美国年度能源消费总量随着年度 GDP 总量的增加将会缓慢增长或衰减，然后进入下一阶段的快速变化过程。

这里宜说明的是，在对数据阵列里部分数据的处理中，一种比较典型的数据内插方程形式为

$$y_{i+1} = 0.25y_i + 0.5y_{i+1} + 0.25y_{i+2}, \quad (2.196)$$

式中 y_i 、 y_{i+1} 、 y_{i+2} 为所分析的数据子阵列中三个相邻数据；当数据由后向前推算时， $i = N_{SUB} - 2$ to 1， N_{SUB} 为数据子阵列中的数据个数， $y_{N_{SUB}-1}$ 及 $y_{N_{SUB}}$ 为已知数据。

由内插方程 (2.196) 式即得数据前推计算方程

$$y_i = 2y_{i+1} - y_{i+2}. \quad (2.197)$$

方程 (2.197) 式的相应差分方程形式为

$$y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 0; \quad (2.198)$$

这是一个典型的二阶常系数齐次线性差分方程，其特征方程为 $\lambda_{US}^2 - 2\lambda_{US} + 1 = 0$ ；因该特征方程有重根 $\lambda_{US1} = \lambda_{US2} = 1$ ，即解得差分方程 (2.198) 式的通解为线性方程形式

$$y_i = C_{US1} + C_{US2}i, \quad (2.199)$$

这里 C_{US1} 、 C_{US2} 为待定常数。

在图 2-21 所示的美国从 1860 年到 2006 年间 147 组能源消费总量数据中，对从 1860 年到 1950 年数据的分析，可知先基于 1949 年、1950 年二个消费总量数据，由方程 (2.193) 式按年向前推算得到 1948 年的数据，持续向前推算，其中从 1944 年开始向前每 5 年预置一次数据，再附加 1903 年及 1888 年二年的预置数据，向前推算直到 1860 年的数据；即图 2-21 所示的美国能源消费总量数据从 1860 年到 1950 年的 91 个数据中，已知数据 2 个，预置数据 19 个，推算数据 70 个；由此基本数据分析表明方程 (2.194) 式、(2.195) 式仅具有数据骨架主线趋势意义。

依据方程 (1.1) 式, 还可描述如一个国家年度人口总数 (年末人口数) 数据 P 与年度 GDP 数据 G 之间阶段性具有极限 (或饱和) 及波动性质的趋势方程

$$\varpi_{PG1} \frac{dP}{dG} + \varpi_{PG2} \frac{d^2 P}{dG^2} + \xi_{PGIE} + \xi_{PG1} P + \xi_{PG2} P^2 + \xi_{PG3} P^3 = \psi_{PGEE}, \quad (2.200)$$

这里将人口总数 P 平滑等效为连续性参量; 取 ϖ_{PG1} 、 ϖ_{PG2} 、 ξ_{PG1} 、 ξ_{PG2} 、 ξ_{PG3} 为系函数; ξ_{PGIE} 、 ψ_{PGEE} 分别为内、外激励函数; $P(G \rightarrow 0) \rightarrow P_C$, P_C 为待定量。

当 $\xi_{PG2} = 0$ 、 $\xi_{PG3} = 0$ 时, 方程 (2.200) 式简化为

$$\varpi_{PG1} \frac{dP}{dG} + \varpi_{PG2} \frac{d^2 P}{dG^2} + \xi_{PG1} P = \psi_{PGEE} - \xi_{PGIE}. \quad (2.201)$$

对于美国从 1860 年到 2006 年间合计 147 组的年度 GDP 数据 G (1990 年 GK 10 亿美元) 及年度人口数据 P (千人), 数据曲线形态特征如图 2-22 所示, 方程 (2.201) 式的一阶段性具体简略参考形式为

$$\frac{d^2 P}{dG^2} + 2.63 \times 10^{-3} \frac{dP}{dG} + 3.70 \times 10^{-7} P = 0.136634; \quad (2.202)$$

其解为

$$P = 369281 - 81642 \exp[-2.48 \times 10^{-3} G] - 267638 \exp[-1.49 \times 10^{-4} G]. \quad (2.203)$$

方程曲线形态如图 2-22 所示; 方程与所拟合数据之间的相关系数为 0.9972。

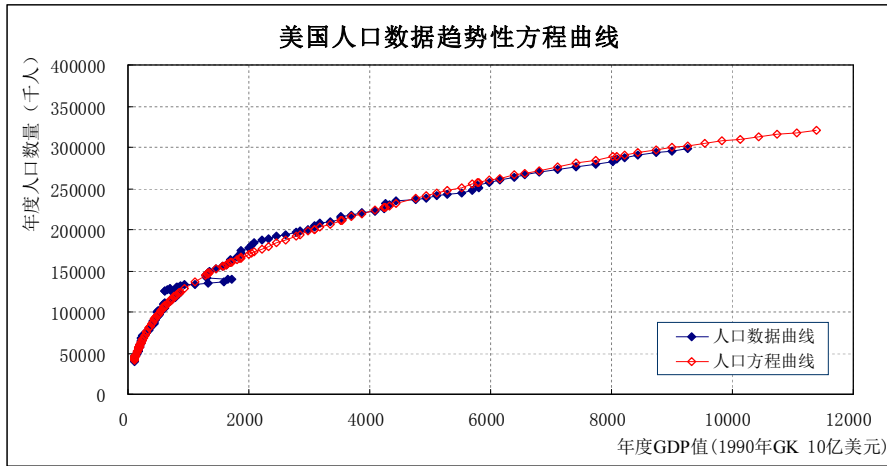


图 2-22 美国年度人口数据趋势性方程曲线图

Fig. 2-22 Curve figure of tendency fitting equation of the annual population in the United States

可见由方程 (2.203) 式给出的美国阶段性人口数据趋势极限特征值 P_{USlim} 为

$$P_{USlim} = 369281 \text{ (千人)}. \quad (2.204)$$

在此阶段性极限值之后, 美国年度人口总数 (年末人口数) 将呈现出缓慢增长或衰减特征, 然后进入下一阶段的快速变化过程。

由美国阶段性的年度能源消费总量趋势性极限特征值方程 (2.195) 式及人口数据趋势性极限特征值方程 (2.204) 式, 取美国阶段性人均能源消费趋势极限特征值数据 E_{USPlim} (千克油当量), 则有 $E_{USlim} \times 10^6 \times 10^3 = E_{USPlim} P_{USlim} \times 10^3$; 即得美国阶段性人均能源消费趋势极限特征值数据 E_{USPlim} (千克油当量) 为

$$E_{USPlim} = \frac{10^6 E_{USlim}}{P_{USlim}} = \frac{2785 \times 10^6}{369281} \approx 7542 \text{ (千克油当量)}. \quad (2.205)$$

依据人口简化趋势方程 (2.201) 式, 对于英国从 1830 年到 2006 年间合计 177 组的年度 GDP 数据 G (1990 年 GK 10 亿美元) 及年度人口数据 P (千人) 曲线特征, 其如图 2-23A 所示, 亦可得相应的一阶段性具体简略人口方程形式为

$$\frac{d^2 P}{dG^2} + 4.98 \times 10^{-3} \frac{dP}{dG} + 1.75 \times 10^{-6} P = 0.114188; \quad (2.206)$$

其解为

$$P = 65250 - 41320 \exp[-4.6 \times 10^{-3} G] - 7930 \exp[-3.8 \times 10^{-4} G]。 \quad (2.207)$$

方程曲线形态如图 2-23A 所示；方程与所拟合数据之间的相关系数为 0.9949。

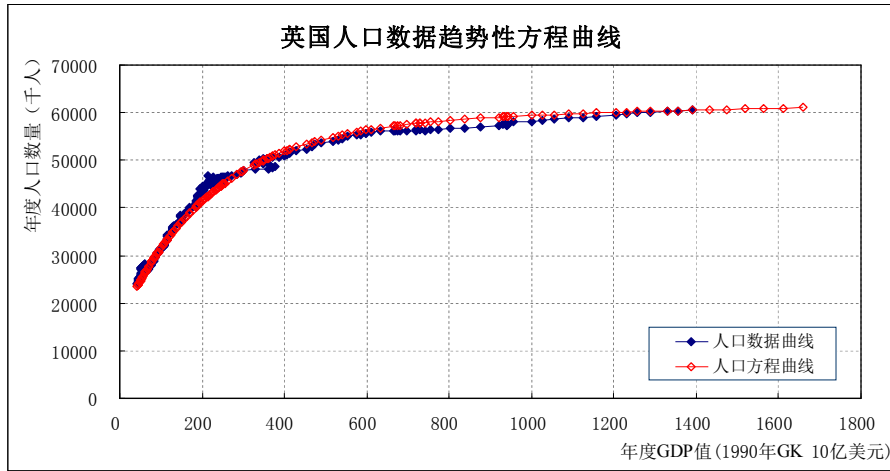


图 2-23A 英国年度人口数据趋势性方程曲线图

Fig. 2-23A Curve figure of tendency fitting equation of the annual population in the United Kingdom

对于人口方程 (2.200) 式，其还可以表示为

$$\varpi_{PG1} \frac{dP}{dG} + \varpi_{PG2} \frac{d^2 P}{dG^2} + \xi_{PG2} (P - P_0)^2 + \xi_{PG3} P^3 + \nu_{PG0} = 0, \quad (2.208)$$

式中 $P_0 = -0.5\xi_{PG1}\xi_{PG2}^{-1}$, $\nu_{PG0} = -\psi_{PGEE} + \xi_{PGIE} - 0.25\xi_{PG1}^2\xi_{PG2}^{-1}$ 。

特别地在 $\varpi_{PG2} = 0$ 、 $\xi_{PG3} = 0$ 时，其一简略表述形式为

$$\varpi_{PG1} \frac{dP}{dG} + \xi_{PG2} (P - P_0)^2 + \nu_{PG0} = 0; \quad (2.209)$$

当 ϖ_{PG1} 、 ξ_{PG2} 、 ξ_{PGIE} 、 ψ_{PGEE} 为常量时，其诸解为 (1.5)、(1.6) 的形式。

更为简单地当 $\nu_{PG0} = 0$ 时，方程 (2.209) 式成为

$$\varpi_{PG1} \frac{dP}{dG} + \xi_{PG2} (P - P_0)^2 = 0; \quad (2.210)$$

进而当 $\xi_{PG2} \neq 0$ 、 $P(G \rightarrow 0) \approx 0$ 时其一解的形式为

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \frac{\varpi_{PG1}\xi_{PG2}^{-1}}{G - \varpi_{PG1}[\xi_{PG2}P_0]^{-1}} \\ &= P_{\lim} - \frac{P_{\lim}G_0}{G + G_0} \\ &= P_{\lim} \left[1 - \frac{G_0}{G + G_0} \right]; \end{aligned} \quad (2.211)$$

式中 $G_0 = -\varpi_{PG1}[\xi_{PG2}P_0]^{-1}$ 、 $P_{\lim} = P_0$ 为待定常量；可见 G_0 为 G 的初始相位值， P_0 为 P 的趋势性极限值；常量 ϖ_{PG1} 、 ξ_{PG2} 之间的关系为 $\xi_{PG2} = -\varpi_{PG1}[P_{\lim}G_0]^{-1}$ 。

仍然对于诸如英国从 1830 年到 2006 年间合计 177 组的年度 GDP 数据及人口数据特征，则有方程 (2.210) 及其解 (2.211) 式的趋势性具体参考形式分别为

$$\frac{dP}{dG} - 1.44 \times 10^{-7} (P - 65250)^2 = 0; \quad (2.212)$$

$$P = 65250 \left[1 - \frac{106.43}{G + 106.43} \right]。 \quad (2.213)$$

趋势方程曲线形态如图 2-23B 所示；方程与所拟合数据之间的相关系数为 0.9934。

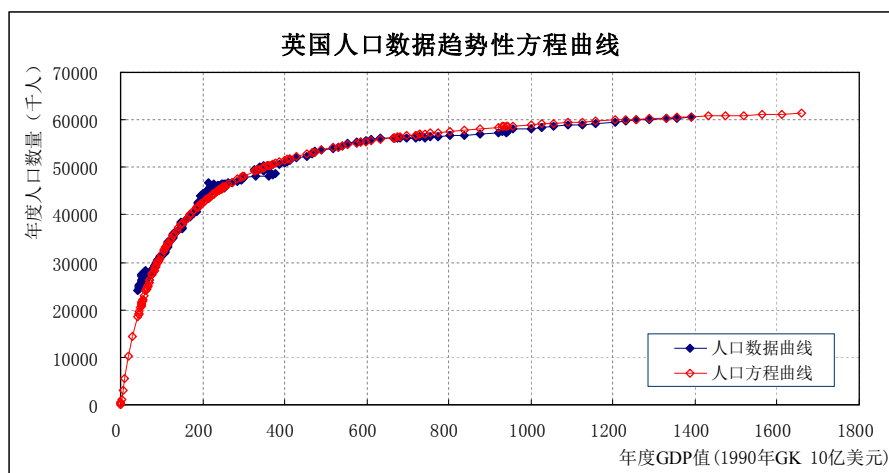


图 2-23B 英国年度人口数据趋势性方程曲线图

Fig. 2-23B Curve figure of tendency fitting equation of the annual population in the United Kingdom

由人口方程 (2.207) 式或方程 (2.213) 式，即可得英国阶段性人口数据趋势极限值 P_{UKlim} 为

$$P_{UKlim} = 65250 \text{ (千人)}。 \quad (2.214)$$

在此阶段性极限值之后，英国年度人口总数（年末人口数）将呈现出缓慢增长或衰减特征，然后进入下一阶段的快速变化过程。

在数据组层面，相对于中国等部分发展中国家，上述美国的能源消费数据、人口数据及 GDP 数据，与英国的人口数据及 GDP 数据等都比较丰富，可以进行较为细致的阶段性单变量极限分析；而中国等部分发展中国家的相关数据则比较单薄，只能较为初步的阶段性单变量极限探讨。

对于中国（大陆）从 1952 年到 2009 年间合计 58 组的能源消费总量数据 E （标准煤，百万吨）及年度 GDP 数据 G （10 亿元人民币）曲线形态如图 2-24 所示。

依据方程 (2.190) 式，得中国（大陆）能源消费总量数据及年度 GDP 数据关系的一阶段性简略具体二阶常系数非齐次线性微分方程形式为

$$\frac{d^2 E}{dG^2} + 5.19 \times 10^{-4} \frac{dE}{dG} + 9.5 \times 10^{-9} E = 5.273 \times 10^{-5}； \quad (2.215)$$

得其一通解形式为

$$E = 5550 - 1312 \exp[-5.0 \times 10^{-4} G] - 4238 \exp[-1.9 \times 10^{-5} G]。 \quad (2.216)$$

趋势性方程曲线形态如图 2-24 所示；方程与所拟合数据之间的相关系数为 0.9703。

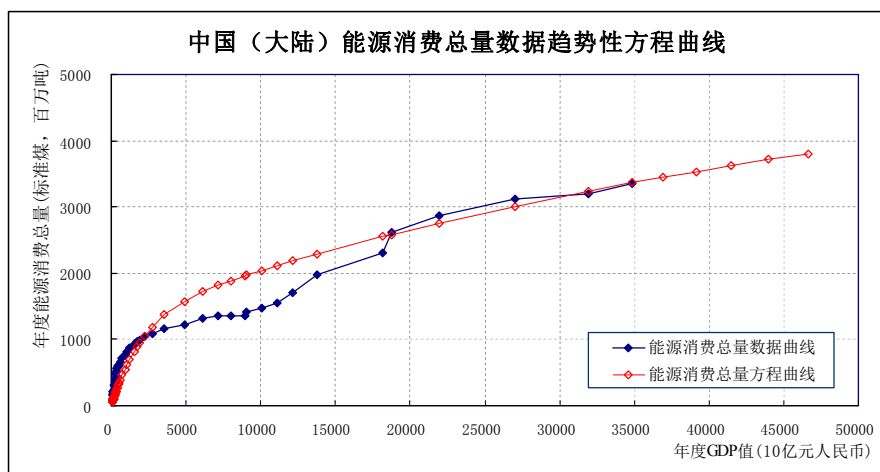


图 2-24 中国（大陆）年度能源消费总量趋势性方程曲线图

Fig. 2-24 Curve figure of tendency fitting equation of the total annual energy consumption in the Chinese mainland

方程 (2.216) 式表明中国 (大陆) 阶段性的年度能源消费总量趋势性极限特征值 E_{CNlim} 为

$$E_{\text{CNlim}} = 5550 \text{ (百万吨标准煤)}; \quad (2.217)$$

或者表示为油当量形式 (这里取油当量与标准煤的换算系数为 1.4286)

$$E_{\text{CNlim}} = 3885 \text{ (百万吨油当量)}. \quad (2.218)$$

同样, 在此阶段性极限值之后, 中国 (大陆) 年度能源消费总量随着年度 GDP 总量的增加将会缓慢增长或衰减, 然后进入下一阶段的快速变化过程。

一方面, 中国 (大陆) 从 1952 年以来的年度人口总数 (年末人口数) 数据包含了较多的相关政策方面的因素; 另一方面, 将 $E = 10^{-6} E_p P$ 及 $G = 10^{-6} G_p P$ 代入年度能源消费方程 (2.188) 式

$$\varpi_{\text{EG1}} \frac{dE}{dG} + \varpi_{\text{EG2}} \frac{d^2 E}{dG^2} + \xi_{\text{EGIE}} + \xi_{\text{EG1}} E + \xi_{\text{EG2}} E^2 + \xi_{\text{EG3}} E^3 = \psi_{\text{EGEE}}$$

中直接进行人均能源消费数据及人口数据分析, 目前还比较困难。但如果在趋势性层面, 单独建立年度人均能源消费方程, 使得年度能源消费总量极限值及年度人均能源消费极限值联立, 则即亦可以初步讨论估计中国 (大陆) 年度人口总数 (年末人口数) 的阶段性趋势极限值。

参照中国 (大陆) 年度能源消费总量的分析方法, 在单变量趋势毛估探讨层面, 对于理想极限或饱和过程, 诸如一个国家年度人均能源消费数据 E_p 与年度人均 GDP 数据 G_p 之间在趋势上仍可由方程 (1.19) 式、甚至是方程 (1.1) 式的非线性动力学方程形式予以探讨性描述

$$\varpi_{\text{EGP1}} \frac{dE_p}{dG_p} + \varpi_{\text{EGP2}} \frac{d^2 E_p}{dG_p^2} + \xi_{\text{EGPIE}} + \xi_{\text{EGP1}} E_p + \xi_{\text{EGP2}} E_p^2 + \xi_{\text{EGP3}} E_p^3 = \psi_{\text{EGPEE}}, \quad (2.219)$$

式中 ϖ_{EGP1} 、 ϖ_{EGP2} 、 ξ_{EGP1} 、 ξ_{EGP2} 、 ξ_{EGP3} 为系函数; ξ_{EGPIE} 、 ψ_{EGPEE} 分别为内、外激励函数; $E_p(G_p \rightarrow 0) \rightarrow 0$ 。

对于中国 (大陆) 从 1952 年到 2009 年间合计 58 组的人均能源消费数据 E_p (千克标准煤/人) 及年度人均 GDP 数据 G_p (元人民币/人), 其数据曲线的趋势形态特征如图 2-25 所示。

初步简单地, 在平滑波动的情况下, 当系函数 $\xi_{\text{EGP2}} = 0$ 、 $\xi_{\text{EGP3}} = 0$ 时, 方程 (2.219) 式成为

$$\varpi_{\text{EGP1}} \frac{dE_p}{dG_p} + \varpi_{\text{EGP2}} \frac{d^2 E_p}{dG_p^2} + \xi_{\text{EGP1}} E_p = \psi_{\text{EGPEE}} - \xi_{\text{EGPIE}}; \quad (2.220)$$

进一步地当 $\varpi_{\text{EGP2}} \neq 0$ 时, 上式转化为简单形式

$$\frac{d^2 E_p}{dG_p^2} + p_{\text{EGP}} \frac{dE_p}{dG_p} + q_{\text{EGP}} E_p = f_{\text{EGP}}, \quad (2.221)$$

式中 $p_{\text{EGP}} = \varpi_{\text{EGP1}} \varpi_{\text{EGP2}}^{-1}$, $q_{\text{EGP}} = \xi_{\text{EGP1}} \varpi_{\text{EGP2}}^{-1}$, $f_{\text{EGP}} = [\psi_{\text{EGPEE}} - \xi_{\text{EGPIE}}] \varpi_{\text{EGP2}}^{-1}$ 。

对于中国 (大陆) 人均能源消费数据及年度人均 GDP 数据, 数据曲线形态特征如图 2-25 所示, 方程 (2.221) 式的一阶段性简略具体的二阶常系数非齐次线性微分方程的趋势形式为

$$\frac{d^2 E_p}{dG_p^2} + 6.07 \times 10^{-4} \frac{dE_p}{dG_p} + 1.566 \times 10^{-8} E_p = 6.17 \times 10^{-5}, \quad (2.222)$$

得其一通解形式为

$$E_p = 3940 - 1050 \exp[-5.8 \times 10^{-4} G_p] - 2890 \exp[-2.7 \times 10^{-5} G_p]. \quad (2.223)$$

趋势性方程曲线形态如图 2-25 所示；方程与所拟合数据之间的相关系数为 0.9586。

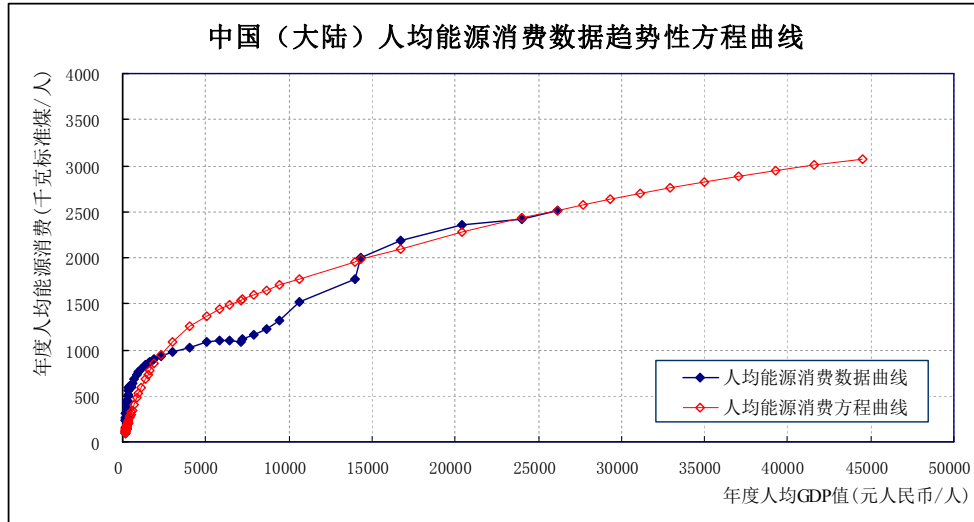


图 2-25 中国（大陆）年度人均能源消费数据趋势性方程曲线图

Fig. 2-25 Curve figure of tendency fitting equation of the per capita energy consumption data in the Chinese mainland

方程 (2.223) 式表明中国（大陆）阶段性年度人均能源消费趋势极限特征值 E_{CNPlim} 为

$$E_{\text{CNPlim}} = 3940 \text{ (千克标准煤/人)}; \quad (2.224)$$

或者表示为油当量形式

$$E_{\text{CNPlim}} = 2758 \text{ (千克油当量/人)}. \quad (2.225)$$

在此阶段性极限值之后，中国（大陆）年度人均能源消费随着年度人均 GDP 的增加将会缓慢增长或衰减，然后进入下一阶段的快速变化过程。

对于一个国家，当其年度能源消费总量趋势极限特征值为 E_{lim} （百万吨标准煤），年度人口总数的阶段性趋势极限值为 P_{lim} （千人），则其人均能耗消费极限特征值 E_{Plim} （千克标准煤/人）的方程为

$$E_{\text{Plim}} = \frac{E_{\text{lim}} \times 10^6 \times 10^3}{P_{\text{lim}} \times 10^3} = \frac{10^6 E_{\text{lim}}}{P_{\text{lim}}};$$

即由 (2.217) 式及 (2.224) 式（或 (2.218) 式及 (2.225) 式）初步得中国（大陆）年度人口总数（年末人口数）的阶段性简略估计极限值 P_{CNlim} （千人）为

$$P_{\text{CNlim}} = \frac{10^6 E_{\text{CNlim}}}{E_{\text{CNPlim}}} = \frac{5550 \times 10^6}{3940} = 1408629.442 \text{ (千人)}. \quad (2.226)$$

由中国（大陆）人口阶段性趋势极限特征值方程 (2.226) 式与美国人口阶段性趋势极限特征值方程 (2.204) 式，得中国（大陆）与美国的人口数量极限特征值之比 R_p 近似为

$$R_p = \frac{P_{\text{CNlim}}}{P_{\text{USlim}}} = \frac{1408629.442}{369281} \approx 3.815. \quad (2.227)$$

由中国（大陆）能源消费总量阶段性趋势极限特征值方程 (2.218) 式与美国年度能源消费总量阶段性趋势极限特征值方程 (2.195) 式，得中国（大陆）与美国的能源消费总量极限特征值之比 R_E 近似为

$$R_E = \frac{E_{\text{CNlim}}}{E_{\text{USlim}}} = \frac{3885}{2785} \approx 1.395. \quad (2.228)$$

由中国（大陆）人均能源消费阶段性趋势极限特征值方程 (2.225) 式与美国人均能源消费阶段性趋势极限特征值方程 (2.205) 式，得中国（大陆）与美国的人均能源消费极限特征值之比 R_{EP} 近似为

$$R_{EP} = \frac{E_{\text{CNPlim}}}{E_{\text{USPlim}}} = \frac{2758}{7542} \approx 0.366. \quad (2.229)$$

图 2-21~图 2-25 中数据参考相关交流资料, 数据本身存在部分内插与相关误差, 分析采用单变量趋势方程方法, 具有非解析的粗略毛估成分, 偏差、牵强乃至脱漏较大; 故上述初步分析得到的阶段性计算结果谨供进一步的详尽探讨及多变量解析方程形式研究时参考。

上述诸方程给出的阶段性趋势极限特征值, 本质上为现象在长程演化过程中的阶段性台阶特征值; 台阶中亦包含着诸多细化微台阶, 诸台阶又构成更高层面的台阶, 是连续演进与步进跳跃的结合, 在整体上具有类似分形的性质, 而诸多类似分形又形成更高层面的类似分形, 即分形的分形, 层次的变化亦具有相应变化的维数, 乃至维数亦呈现步进跳跃的性质。

图中对数据予以描述的方程, 基本属于半动力学、半趋势拟合性质的, 是对骨架数据或主线数据所进行的刻画描述及短程阶段性预言。单一的、局部的饱和过程构成更高层多变量演化过程的一个阶段性剖面投影台阶, 在前一个接近相对缓慢变化的饱和区域, 转育下一个模式的饱和发展过程, 其脉络上在传续中突破、在更迭中演进; 分析中于整体层面进行多阶段、多台阶、多模式的联合描述, 综合平衡局部细节精度与动态整体演化趋势的关系, 机理分析与趋势计算相结合, 将预言的解析数据与实际将生成的基础数据进行比较, 然后根据比较结果, 对趋势性方程进行相应调整或继续保持, 包括方程中的待定系数, 乃至方程形式, 继而实现从基础数据库, 经趋势方程库, 到解析数据库, 再返回与基础数据库对比, 调整趋势方程, 导出更新的解析数据库, 形成动态的自循环、自提升的数据库体系。

上述关于英国人口、美国及中国人口与能源消费数量的分析讨论, 也是在过去数世纪以来经现在到未来一阶段性时期的世界图景趋势性走向。

天上没有永恒的星辰, 世间亦没有长久的帝国, 盛衰更迭、成住坏空是现象界的普适演化规律。一个国家或组织建设的内在要义就是在保证可控不衰落的大前提下, 适机谋求破局造势壮大发展, 低限即伏隐脱困待时自主崛起。

在一般意义上, 类如方程 (2.56) 式的形式可广泛应用到诸如一个国家、一个地区或一个机构中各阶层人均年收入值与其所占人口或人员比例数之间关系等方面分布数据的趋势性阐释, 进而计算所拥有财富的极限; 其中各阶层人均年收入值与其所占人口比例数之间的趋势性关系方程为

$$z_{PD1} \frac{dy_{PR}}{dx_{PI}} + z_{PD2} \frac{d^2 y_{PR}}{dx_{PI}^2} + z_{PIE} + z_{PI} y_{PR} + z_{P2} y_{PR}^2 + z_{P3} y_{PR}^3 = z_{PEE}, \quad (2.230)$$

这里 x_{PI} 、 y_{PR} 分别为诸阶层人均年收入值与其所占人口比例数, z_{PD1} 、 z_{PD2} 、 z_{PI} 、 z_{P2} 、 z_{P3} 为系数, z_{PIE} 为内激励函数, z_{PEE} 为外激励函数; $y_{PR}(x_{PI} \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$ 。

通过对部分国家各阶层人均年收入值与其所占人口比例数之间关系具体数据的深入分析, 在趋势层面略去细节波动部分, 诸系数及内外激励函数为常量情况下, 可初步由方程 (2.230) 式的近似等效解析解予以描述

$$y_{PR} = A_p \frac{\exp[\alpha_{P1}(x_{PI} - x_{P0})] - \exp[-\alpha_{P2}(x_{PI} - x_{P0})]}{2 \cosh[\alpha_{P3}(x_{PI} - x_{P0})]}, \quad (2.231)$$

这里 x_{P0} 、 $A_p > 0$ 、 $\alpha_{P1} > 0$ 、 $\alpha_{P2} > 0$ 、 $\alpha_{P3} > 0$ 为待定常量; $\alpha_{P3} > \alpha_{P1}$, $x_{PI} > x_{P0}$ 。

简略地当 $\alpha_{P1} = \alpha_{P2}$ 时, 方程 (2.231) 式转化为简单形式

$$y_{PR} = A_p \frac{\sinh[\alpha_{P1}(x_{PI} - x_{P0})]}{\cosh[\alpha_{P3}(x_{PI} - x_{P0})]}, \quad A_p > 0, \quad \alpha_{P3} > \alpha_{P1} > 0. \quad (2.232)$$

方程 (2.232) 式于趋势层面具有在曲线峰值二侧附近区域非对称、及在峰值之后曲线逐渐趋于指数函数衰减的特征, 其在整体上对数据曲线形态具有很好的趋势性描述; 该指数函数的表述形式为

$$y_{PR} = A_p \exp[-(\alpha_{P3} - \alpha_{P1})(x_{PI} - x_{P0})]. \quad (2.233)$$

参照方程 (2.233) 式, 更为简略地, 数据曲线还可由方程 (2.230) 式的最简单条件解析解类如方程 (2.63) 式的变形形式一即具有广义 Boltzmann 分布方程的形式予以趋势描述

$$y_{PR} = y_{PRmax} \exp[-\alpha_{P0}|x_{PI} - x_{PB0}|], \quad y_{PRmax} > 0, \quad \alpha_{P0} > 0; \quad (2.234)$$

这里 x_{PB0} 、 α_{P0} 为待定常量, $x_{PB0} > x_{P0}$ 、 $\alpha_{P0} \approx \alpha_{P3} - \alpha_{P1}$; y_{PRmax} 为 y_{PR} 的最大值, $y_{PRmax} = y_{PR}(x_{PI} = x_{PB0})$ 。

方程 (2.234) 式在峰值附近仅是趋势描述, 在峰值之后则具有较好的数据曲线形态适应性。例如对于一个国家各阶层人均年收入 x (10^3 美元/人) 与其所占总人口比例 y (%) 之间的关系, 采用简略趋势性方程 (2.232) 式, 有一具体近似方程形式为

$$y_{PR} = 30.0 \frac{\sinh[0.0690(x_{PI} + 4)]}{\cosh[0.1026(x_{PI} + 4)]}; \quad (2.235)$$

方程描述的趋势性曲线如图 2-26 所示 (这里诸阶层所占总人口比例 y 之和 Σy 等于 100%)。

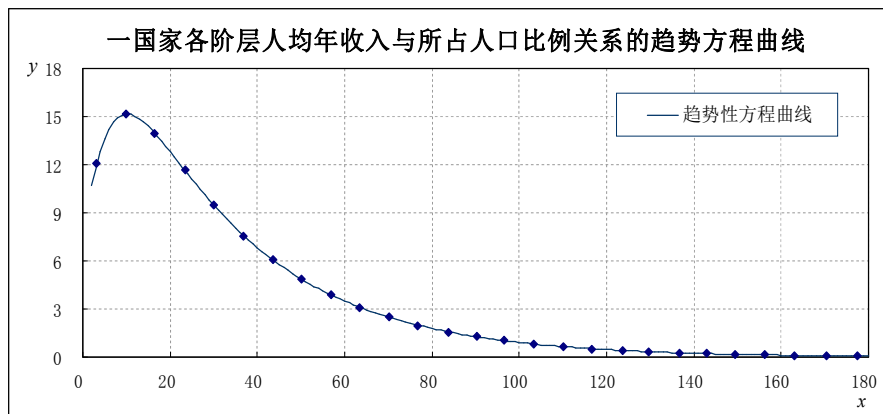


图 2-26 一国家各阶层人均年收入与所占人口比例方程曲线图 ($\Sigma y=100\%$)

Fig. 2-26 Curve figure of simplified tendency equation of relation between the average per capita annual income of the every stratum of society and the proportion of the total population in a country ($\Sigma y=100\%$)

在全球规模上, 以各国家人均年收入值与其所占人口比例数作为各阶层, 持续向国家内地区、机构等方向细化, 诸细化阶层仍依据上述方程形式以趋势描述, 整体上具有分形特征, 各细化阶层乃至个体结构皆是所在世界演化过程的动态缩影。

国家构架及建设需要社会分工及资本运作, 社会分工即产生权贵集团与平民底层, 资本运作的本质是资源霸占垄断及逐层奴役盘剥, 扫荡性掠夺集聚是资本的内秉特征, 导致利益向上集中, 成本向下排递, 使得底层平民向上跨越阶层的代价越来越高, 而由战争、瘟疫及资本运作联合导致的周期性社会危机最终基本还仍然都是由国家的底层平民承担。

一般普适地, 世界上各主要国家人均能耗与其在世界上所占相应人口比例关系、人均 GDP 与其在世界上所占相应人口比例关系, 一个国家内各主要地区人均能耗与其所在国家占有的相应人口比例关系、人均 GDP 与其所在国家占有的相应人口比例关系等方面, 基本都可参照方程 (2.188) ~ (2.235) 式予以趋势性探讨描述。

这种结构上的相似性对于深入研究基础数据库、趋势方程库、解析数据库在多层面的自适应循环更新具有引导意义, 为一个国家或地区的能源消费量、人口数量、收入比例、安全持续发展及服务保障系统建设支出等主要因素平衡协调及动态控制提供参考指向。

社会现象演化过程纷繁复杂, 多背景、多层面、多变量等诸多因素参与其中; 线性缓慢增长是否一定会带来非线性快速增长, 非线性快速增长是否一定会以某种极限形式作为阶段性的后期状态, 则是由现象演化过程与环境之间所进行的物质、能量、信息等因素交换的动态平衡决定的; 其一是线性缓慢增长是否会引起积累的释放, 其二是非线性快速增长之后进入新的平衡状态, 然后分岔或周期性分岔, 或缓慢变化成为下一次非线性快速变化的前期线性台阶, 或在极少数情况下导致断崖式衰减 (衰落), 即单因素增长过冲导致失调失控; 所以, 有效控制增长模式, 是这方面的重要研究方向。

上述方程中的待定常量与现象演化过程中的关键参数没有建立直接的解析关系, 是属于过渡性的方程形式, 其意义之一即在于为将建立的解析动力学微分方程提供前期趋势性框架参考。单变量方程形式及解的分析, 在适当兼顾细节的情况下, 给出主线脉络的远景趋势及阶段性台阶特征值, 在过去及未来都是比较重要的研究探讨方向。

基于数据分布特征建立的动力学描述方程, 仍然是属于数据驱动分析方法, 具有模型简洁灵活特点的同时, 对于长程预测与跨层面兼顾及阶跃突变等描述适应性较弱; 而长程积累、多层面参与及阶跃突变过程等往往由非线性方程描述。

非线性方程方向既十分活跃激动人心, 亦常常无涯难解; 非线性既是生门, 亦是死地。

确立相应的动力学微分方程, 将使得方程中的诸待定常量都能够与现象演化过程的关键参数或本征结构量密切相联系, 通过适时调整这些关键参数, 达到有效控制增长模式的目的; 既能够在长程层面与现象演化趋势基本一致, 同时又尽可能兼顾演化过程局部细节波动; 而此动力学微分方程, 将是这个解析理论体系的基石, 同时对于一个国家的发展规划设计及其与外国关系预先稳步调控亦皆是根本性的理论依据。

2.6 关于部分一阶差分方程的一种连续性方程构造方法探讨

当一个序列可以用差分方程表示时,其后项与前几项具有函数关系;下面参照方程(1.1)式的形式,在趋势轮廓层面探讨部分一阶差分方程的一种连续性方程构造形式,在趋势上给出相邻前项的微小变化对后项变化(敏感度)的影响,为差分方程的连续性描述提供参考。

相应地,部分二阶及以上差分方程可用连续性的偏微分方程组构造形式进行趋势性探讨。

对于部分实数数据序列 x_i (i 为自然数),当其相邻数据呈现线性变化,或具有饱和、蠕变、振荡等性质时,则其差分方程可在趋势层面由方程(1.1)式予以连续性自迭代方法构造

$$\varpi_1 \frac{dx_{i+1}}{dx_i} + \varpi_2 \frac{d^2 x_{i+1}}{dx_i^2} + \xi_{IE} + \xi_1 x_{i+1} + \xi_2 x_{i+1}^2 + \xi_3 x_{i+1}^3 = \psi_{EE}, \quad (2.236)$$

这里 ϖ_1 、 ϖ_2 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 皆为系函数; ξ_{IE} 为内激励函数, ψ_{EE} 为外激励函数; ξ_2 、 ξ_3 是具有非线性极限特征的函数。

当 $\varpi_1 = 0$ 、 $\varpi_2 \neq 0$ 、 $\xi_1 = 0$ 、 $\xi_2 = 0$ 、 $\xi_3 = 0$ 时,方程(2.236)简化为

$$\varpi_2 \frac{d^2 x_{i+1}}{dx_i^2} = \psi_{EE} - \xi_{IE}; \quad (2.237)$$

当 ϖ_2 、 $\psi_{EE} - \xi_{IE}$ 为常量时,方程(2.237)式的解即为经典差分方程形式

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \varpi_2^{-1} [\psi_{EE} - \xi_{IE}] x_i^2 + C_{D1} x_i + C_{D2}, \quad (2.238)$$

式中 C_{D1} 、 C_{D2} 为待定常量。

对于解(2.238)式,当常量 $C_{D1} \neq 0$ 、 $C_{D2} = 0$ 时,得一类一阶差分方程形式

$$x_{i+1} = C_{D1} x_i [1 + 0.5 [C_{D1} \varpi_2]^{-1} [\psi_{EE} - \xi_{IE}] x_i]. \quad (2.239)$$

由解(2.239)式的表述,可进一步探讨 Feigenbaum 常数的延展性质。

简单地,当序列初始实数 x_1 为 $1 > x_1 > 0$ 及待定常数

$$C_{D1} = -0.5 \varpi_2^{-1} [\psi_{EE} - \xi_{IE}]$$

时,差分方程(2.239)式即成为包括广义 Logistic 差分方程的具有复杂数学性质的一类经典差分方程形式

$$x_{i+1} = C_{D1} x_i [1 - x_i]. \quad (2.240)$$

差分方程(2.240)式,在方程表现形式上极为简洁,但其内在的数学性质却极为复杂;包含着单调、波动、周期性、不规则等一系列特征。

对于差分方程(2.240)式,一般地因 $x_i \neq 0$,故可得其在趋势轮廓层面依赖于常量 C_{D1} 的等效分维扩展方程形式为

$$\frac{dx_{i+1}}{dx_i} - 2 \frac{x_{i+1}}{x_i} + C_{D1} = 0. \quad (2.241)$$

对于差分方程(2.240)式,部分地,在初始实数 $x_1 = 0.00001$ 情况下,当 $C_{D1} = 1.5$ 时的饱和特征曲线与当 $C_{D1} = 3.5$ 时的波动特征曲线形态如图 2-27 所示。

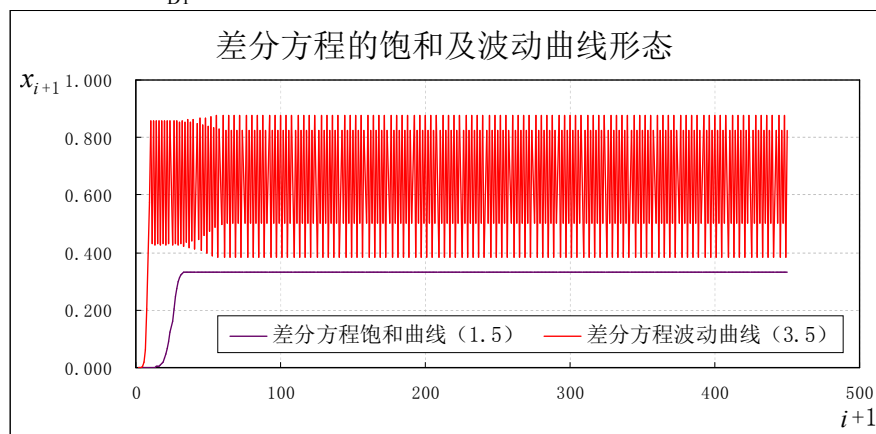


图 2-27 差分方程的饱和 ($C_{D1} = 1.5$) 及波动 ($C_{D1} = 3.5$) 特征曲线形态

Fig. 2-27 Curves figure of the saturation(when $C_{D1} = 1.5$) and fluctuation(when $C_{D1} = 3.5$) characteristics of the difference equation

对于方程 (2.236) 式, 当 $\xi_2 = 0$ 、 $\xi_3 = 0$, 其成为

$$\varpi_2 \frac{d^2 x_{i+1}}{dx_i^2} + \varpi_1 \frac{dx_{i+1}}{dx_i} + \xi_1 x_{i+1} = \psi_{EE} - \xi_{IE}; \quad (2.242)$$

进而当 ϖ_1 、 ϖ_2 、 ξ_1 、 $\psi_{EE} - \xi_{IE}$ 皆为常量, 且 $\varpi_2 \neq 0$ 、 $\xi_1 \neq 0$ 、 $\varpi_1^2 < 4\varpi_2\xi_1$ 时, 其有一波动解表示的差分方程形式为

$$x_{i+1} = C_{W1} \exp(C_{W2}x_i) \cos[C_{W3}x_i + C_{W4}] + \xi_1^{-1}[\psi_{EE} - \xi_{IE}], \quad (2.243)$$

这里 C_{W1} 、 C_{W2} 、 C_{W3} 、 C_{W4} 皆为待定常量; 其中 C_{W2} 、 C_{W3} 分别为

$$C_{W2} = -\frac{\varpi_1}{2\varpi_2}, \quad C_{W3} = \pm \frac{1}{2\varpi_2} \sqrt{4\varpi_2\xi_1 - \varpi_1^2}.$$

由方程 (2.243) 式, 当 $\varpi_1 = 0$ 、 $\psi_{EE} = \xi_{IE}$ 、 $C_{W1} = 1$ 、 $C_{W4} = 0$ 时, 差分方程简化为

$$x_{i+1} = \cos[C_{W3}x_i]; \quad (2.244)$$

方程 (2.244) 式具有多种展开性质; 其中当 $1.2 \geq C_{W3} \geq 0$ 时, x_{i+1} ($i > 100$) 的极限值与初始实数 x_i 无关, 而仅与频率 C_{W3} 值相关; 诸多趋势性拟合方程中的一简略形式即为

$$x_{i+1} (i > 100) = \cos[0.530C_{W3}] - \sin[0.115C_{W3}]; \quad (2.245)$$

拟合方程曲线如图 2-28 所示, 相关系数为 0.9955。

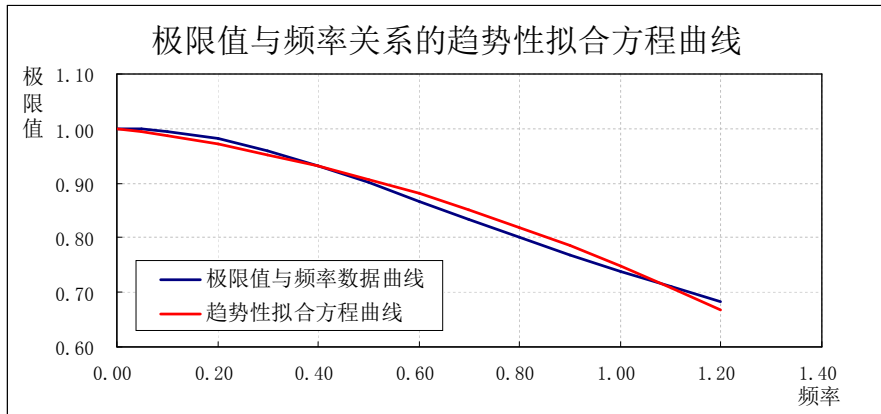


图 2-28 差分方程极限值与频率关系的趋势性拟合方程曲线

Fig. 2-28 Curve figure of tendency fitting equation of relationship between limit value and frequency of the difference equation

更为简单地, 方程 (2.242) 式在局域范围内, 当频率在范围 $1.2 \geq C_{W3} \geq 0.2$ 时, x_{i+1} ($i > 100$) 的极限值与频率 C_{W3} 之间一近于直线的趋势性拟合方程为

$$x_{i+1} (i > 100) = 1.05 - 0.308C_{W3}; \quad (2.246)$$

拟合方程曲线如图 2-29 所示, 相关系数为 0.9994。

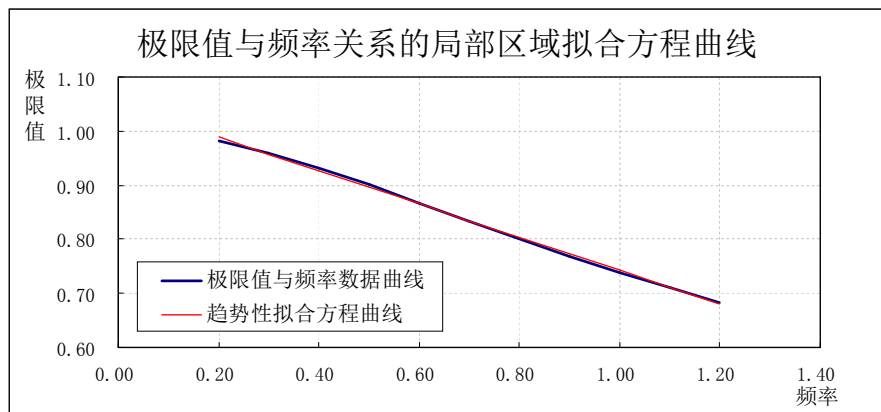


图 2-29 差分方程极限值与频率关系的局部区域 ($1.2 \geq C_{W3} \geq 0.2$) 拟合方程曲线

Fig. 2-29 Curve figure of tendency fitting equation of relationship between limit value and frequency in the partial range ($1.2 \geq C_{W3} \geq 0.2$)

方程 (2.244) 式当频率 $C_{w3} > 1.2$ 时, 开始呈现包括显著波动、波动衰减、单调等多种形态特征, 在初始实数 $x_1 = 0.000025$ 时的部分频率值情况下曲线如图 2-30~图 2-32 所示。

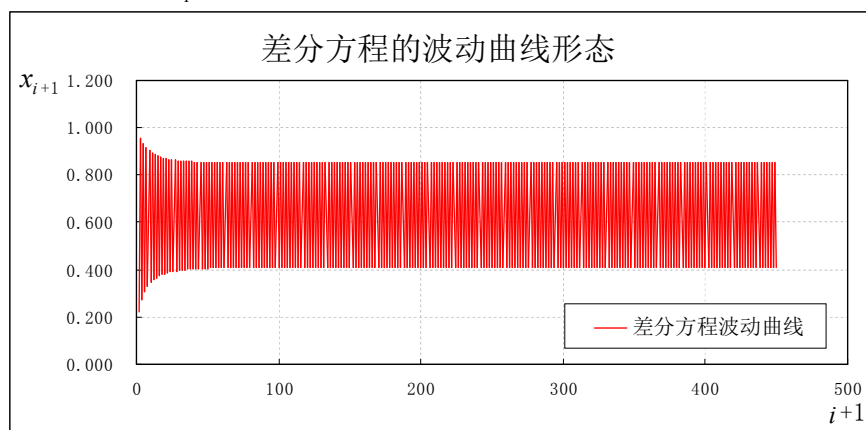


图 2-30 差分方程的波动曲线形态 ($C_{w3}=1.35$)

Fig. 2-30 Curves figure of the fluctuation characteristics of the difference equation (when $C_{w3} = 1.35$)

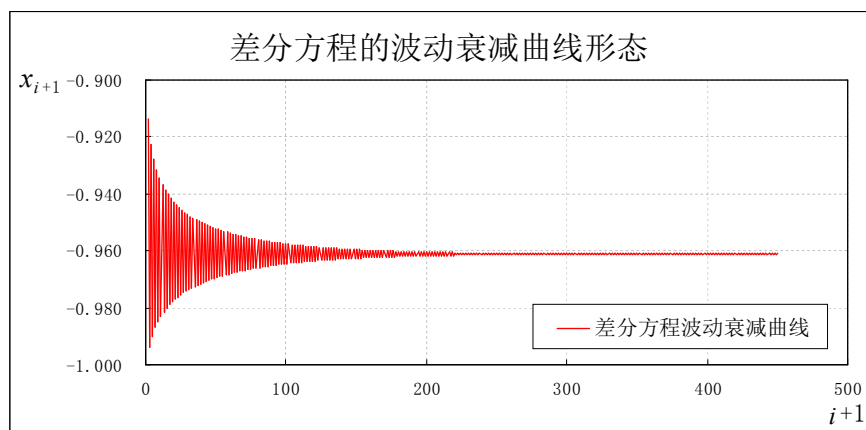


图 2-31 差分方程的波动衰减曲线形态 ($C_{w3}=3.56$)

Fig. 2-31 Curves figure of the fluctuation attenuation characteristics of the difference equation (when $C_{w3} = 3.56$)

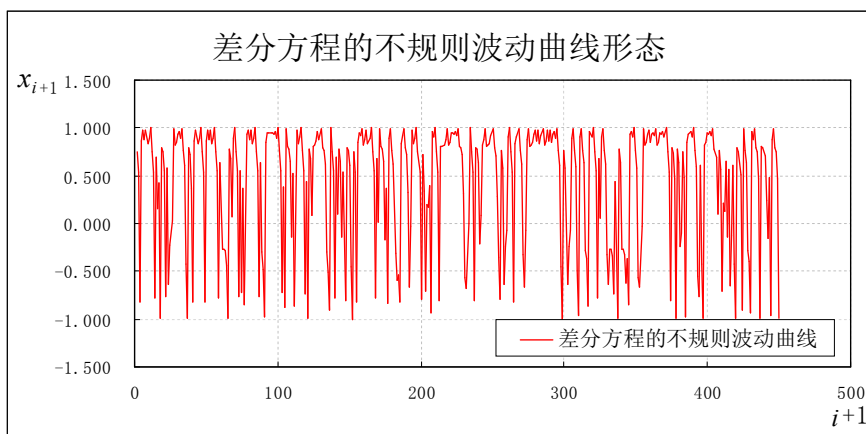


图 2-32 差分方程的不规则波动曲线形态 ($C_{w3}=7.00$)

Fig. 2-32 Curves figure of the irregular fluctuation characteristics of the difference equation (when $C_{w3} = 7.00$)

对于方程 (2.244) 式, 进一步地当待定常数 $\varpi_2 = \xi_1$ 时, 差分方程形式简化为

$$x_{i+1} = \cos x_i; \quad (2.247)$$

对于式中初始实数 x_1 的任意取值 $+\infty > x_1 > -\infty$, 则在 $i \geq 95$ 时 x_{i+1} 有同一趋势极限值

$$x_{i+1} \approx 0.739085133215161, \quad i \geq 95 \quad (2.248)$$

也即差分方程 (2.247) 式中的 x_{i+1} 在 $i \rightarrow +\infty$ 时, 完全等同于方程 $x = \cos x$ 的实数解。

上述关于部分一阶差分方程的一种连续性方程构造方法仅是趋势轮廓层面的探讨; 其对于部分二阶及以上差分方程的连续性偏微分方程组构造形式及其解析途径提供参考。

2.7 数据趋势性拟合分析的置信度参考计算形式

对数据曲线进行骨架层面的趋势方程拟合及短程预测分析,是数据处理的一种重要方法;这其中,应用方程对已有数据趋势拟合的相关系数及置信度计算二个指标一般是必要的。

下面给出的计算步骤为经典简明估计方法,仅供在对数据进行趋势性拟合时参考;其中相关系数取 Pearson 相关系数形式,置信度计算取 Fisher 的 F 检验方法(显著性计算方法)。

取数据组 (x_i, ϕ_i) , 这里 $i = 1$ to n , n 为数据组数,一般取 $n > 2$ 。相应地,对数据组 (x_i, ϕ_i) 进行趋势性方程拟合的数据组为 (x_i, y_i) ;有数组 (ϕ_i, y_i) 的三个方差 $C_{ar}[\phi]$ 、 $C_{ar}[y]$ 、 $C_{ar}[\phi, y]$ 分别为

$$C_{ar}[\phi] = \sum_{i=1}^n \phi_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \phi_i \right)^2, \quad C_{ar}[y] = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2; \quad (2.249)$$

$$C_{ar}[\phi, y] = \sum_{i=1}^n (\phi_i y_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i \sum_{i=1}^n y_i; \quad (2.250)$$

则有相关系数 R_p (Pearson 相关系数形式) 及拟合优度 R_p^2 的方程为

$$R_p = \frac{C_{ar}[\phi, y]}{\sqrt{C_{ar}[\phi]C_{ar}[y]}}; \quad R_p^2 = \frac{(C_{ar}[\phi, y])^2}{C_{ar}[\phi]C_{ar}[y]}. \quad (2.251)$$

由方程 (2.249) ~ (2.251) 式, 在 $n > 2$ 情况下, 仅当在每一点 $y_i = \phi_i$ 都成立时, 才有相关系数 $R_p = 1$ 。相关系数指标, 在充分考虑了数据拟合细节的前提下, 对方程拟合情况给出了整体上的综合评价。

对于相关系数计算, 当数据组数与拟合方程的变量项数(自由度)接近时, 虽然相关系数 $R_p \rightarrow 1$, 但仍不能表明拟合方程的优越程度, 还需要进行置信度计算。

取拟合方程的变量项数为 k_v , 则有 Fisher 的 F 检验方法指标参数 F_{test} 经典计算方程为

$$F_{test} = \frac{(C_{ar}[\phi, y])^2 k_v^{-1}}{(C_{ar}[\phi]C_{ar}[y] - (C_{ar}[\phi, y])^2)(n - k_v - 1)^{-1}}, \quad (2.252)$$

在这里, k_v 亦为分子自由度, $n - k_v - 1$ 为分母自由度。

由方程 (2.249) ~ (2.252) 式即得指标参数 F_{test} 的简明计算参考方程为

$$\begin{aligned} F_{test} &= \frac{(C_{ar}[\phi, y])^2 k_v^{-1}}{C_{ar}[\phi]C_{ar}[y] \left[1 - \frac{(C_{ar}[\phi, y])^2}{C_{ar}[\phi]C_{ar}[y]} \right] (n - k_v - 1)^{-1}} \\ &= \frac{R_p^2 k_v^{-1}}{(1 - R_p^2)(n - k_v - 1)^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.253)$$

在计算出相关系数 R_p 及已知数据组数 n 、拟合方程变量项数 k_v 的情况下, 即可获得 F_{test} 值。将 F_{test} 值与在显著性水平 α_F 为 0.05、0.01、0.001、0.0001 情况下的 F_{test} 分布临界值 $f(\alpha_F, k_v, n - k_v - 1)$ 进行比较, 当 $F_{test} > f(\alpha_F, k_v, n - k_v - 1)$ 时, 则拟合方程的置信度即为 $\beta_F > 1 - \alpha_F$, 其一般用百分数表示; 如 $\alpha_F = 0.001$ 时, 则 $\beta_F = 1 - \alpha_F = 99.90\%$ 。

其中临界值 $f(\alpha_F, k_v, n - k_v - 1)$ 可直接查表或由相关专业软件中的函数赋值计算获得。

对于置信区间, 先计算数组 y_i 的平均值(算术平均值) $\bar{y}$ 及标准差(标准偏差) S_D 分别为

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad S_D = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}; \quad (2.254)$$

再计算参量 T_α 值, 其可直接查表获得, 亦可通过专业软件中函数赋值(当在 t 分布时, 显著性水平为 α_F , 自由度为 $n - k_v - 1$ 时, 参量 $T_\alpha = T_\alpha(\alpha_F, n - k - 1)$) 计算获得; 则在置信度为 $\beta_F = 1 - \alpha_F$ 时的置信区间 $[y_{CS}, y_{CE}]$ 计算参考估计形式为

$$[y_{CS}, y_{CE}] = [\bar{y} - T_\alpha S_D n^{-0.5}, \bar{y} + T_\alpha S_D n^{-0.5}]. \quad (2.255)$$

2.8 自然现象演化过程的大略动态分类

对广泛的自然现象进行深入分析，其演化过程可有多种分类途径和方法；其中从饱和过程及蠕变过程的角度考察，可以初步确定自然现象（也包括社会现象）演化过程在趋势上大略动态分为如下三类：

第一类，饱和过程；严格的饱和过程在整体远景上趋于一定值，广义的饱和过程趋于一定的规律或方程形式，更为广泛的饱和过程或类饱和过程，则在整体远景上存在确定的不同演化方程之间的跳转规律、乃至定非定；

第二类，蠕变过程；严格的蠕变过程，在远景上迅速趋于无限；广义的蠕变过程，经过快速的增长后又趋于较为平缓的变化，即短期的快速增长后没有进入无限状态，而是进入另一阶段的演化过程；表象的蠕变过程，即局部类似蠕变过程，但在远景上或趋无限或不确定；

第三类，除上面饱和过程及蠕变过程的其它演化形式；这类演化过程部分地或是具有饱和过程及蠕变过程二者兼容或叠加的混合模式，或是几乎完全不同于饱和过程及蠕变过程的演化形式。

一般地，诸多的较为经典的演化过程，如上述饱和过程及蠕变过程容易建立方程模型予以刻画；尤其在较为简单的趋势情况下，可依据连接方程（1.19）式及其广义拓展形式（1.32）式、（1.33）式予以描述。

上述广义饱和过程的隐喻包括：你所拥有及付出的，离开了家庭，离开了故土，离开了地球，还有谁认可你？你有多少能够拿得出手并明摆上桌面的可掌控力量及超卓成就？即使是以纪念浮名而命名的基本方程、定律、常数、单位、效应及化学元素等，你都拥有几项？离开了太阳系、银河系，离开了目前所认知的太虚，还有谁认可你？你可曾游历过多世界并从学其住世的智者？你能否将所学所证浓缩为一句偈语？你能否将漫长数劫化为一弹指顷？谁深刻地感动或影响过你、你又深刻地感动或影响过谁？出了这一片儿、过了这一阵儿、离了这个圈儿，你是谁？是不是近于几乎都从未有过你这么个人？甚至几乎是自己也并不认识自己、也并不完全懂得自己、只是一副空架子徘徊游荡在天地间？即使缔造帝国并加之著述等身，但若在生死解脱方面没有悟解实证，则于觉圣维度微升 0.1 维整体测度即近于零。

在尘世间，较为普遍的二个现象是：许多时候人们对至亲师友，常苛责深怨于少许未顾，而对路人陌客，却常感怀涕零于些微援手；居家时渐生拨日赶月摘星移斗之志，到十字街头举目一望发现原来自己近于一无所有，成就一番事业的可调动资源及前提基础几近于零。

百转千回的思绪萦绕着辗转旅程，刻骨铭心的眷恋时常展现于拂晓梦境；往昔遥远的记忆早已根植在内心深处，幻生幻灭的斑驳岁月演绎了凡尘歌声。

在娑婆世界，人的一生，包括事业和爱情，更多时仅是因缘游历、应景演戏及交易博弈。人生真正活开了，当像孩童般纯真朴直，如老者一样宽厚祥和，似高山一般峻拔挺立；如夕阳般温暖淡远，似大海一样浩瀚辽阔，同天空一般宁静安适，若星河一样深广璀璨；明处生灭之中，亦趣生灭灭尽；一言以要之，人生就是自然亦真亦幻的通透缩影。

广义蠕变过程的隐喻包括，你以为一切都结束了，可实际上已经伤痕累累，还要在新的层面即将展开远征；你以为一切都这么遮过去了，可实际上原有的许多障碍都并没有完全消解，只是已经改头换面而且壮大成长；你以为就此诀别就相安无事了，可实际上未来的相逢是因缘业力早就已经安排好的、促成必然会出现的事件，可能还会因为孕育发展而更为缤纷绚丽、或更加激越决绝。

一仰望，轮回就启动了；一鄙视，轮回就运行了；究竟是妄我轮回妄我。而造成及操纵这一切过去、现在及未来图景的主使，就是佛法执。

在现象幻界，阶段性地，佛法执是无明辗转轮回的根源。

虚 志 在家宏图越星海，一出宅门化尘埃；风雨人生似幻路，零落归去又复来。

幻 世 清江素练绕丛山，麓野田园向柳岸；愁人日夜思长短，闲士梦乡依淡然。

行 者 朝夕在旅途，经年历寒暑；浮生多少梦，常向云归处。

觉 悟 苍茫弥天际，幻境佛法执；人生未定数，无住心启时。

2.9 权势、财富、学识及施爱特征的趋势性探讨与圣者大道

在人类社会的动态组织构架中，权势、财富、学识及施爱，是其中的主旋律构成部分，盛衰生灭、迁流更迭是主线脉络。

权势的意义主要在于维持社会结构的稳定，在稳定中谋求高势；财富的意义主要在于利益驱动，在合理的润滑下扩大积累规模；学识的意义主要在于博览群书、学贯古今，集成一家之言进而开宗立派；施爱的意义主要在于和谐互助，适度延续善良；需要指出，施爱需要有智慧作引导，智慧又因施爱而渐于圆融。渊博的学识及广博的施爱，在一定程度上体现着社会存在的根本意义，乃至是人类社会健康发展的重要基石。

这其中，积累学识主要是面向人生觉悟及根本解脱，而不是为了雅致闲适或装腔作势，更不是为了炫通显能及获得世间的光环名声；无相施爱至为重要，否则施爱就转变成为一种凡世投资交易或人天福报；平等回向是觉行过程的必要环节，亦是趣向圆融的检验台阶；以身作则适时传播践行觉悟大道，是觉悟者游历人生经行世间的本份。

纵观历史，舆论是取国利器，亦是灭国先导；掌握舆论即是相当于占有了部分隐形江山。

当一个国家完全开放舆论后，短时期会走向繁荣，但在长期上则亦容易被其他国家利用而导致国力快速衰退甚至解体；而在另一极端状态，当完全禁闭舆论，只容许一种声音及思想时，则国家会由繁荣很快走向阶段性顶点，然后开始持续地走下坡路，短时期内不可逆转，直至触及深谷，或衰弱解体，或隐忍等待国运下一次的爬升通道开启。

适当程度地开放舆论，既保持民众精神活性又有凝聚力；适机分化重组进而操纵既得利益集团，稳固培植新生嫡系队伍形成缓冲区域及制衡力量，维持既得利益集团与普通民众间的动态平衡，是统治者统驭天下、强化根基的精要所在。

社会是多层面、多因素的非线性耦合动态复合体，历史沉积、即下现实及未来趋势有机地交织在一起，使这个复合体生成了有别于其中的一般个体所几乎完全不具有的特征。

适当地努力奋斗是必要的，但机会及境遇总在刹那间闪现即逝难以捕捉，付出与收获的关系常常出乎预料，公平与能力多时仅是站队的语言标注，感叹与无奈往往在不经意间萦绕心头，短暂的激情与欢愉终被漫长的应付与厌倦所替代。在国家这个巨大机器及社会这个庞然大物前，任何个体的质疑及妄动都基本微不足道并自取其辱，许多时低头适应加入及恭敬顺从成为人生旅途上的首选。个人的理想与目标，家人的期盼与寄托，都汇入到脆弱的几乎朝不保夕的职业上，纠结和挣扎成为青年及中年时期的主旋律。三分的包容回以十分的温柔，些许的支撑用余生回赠。策略地迎合与韧性的坚持，在社会的熔炉里完成人生的蜕变，也送走了人生宝贵的灿烂时光。多少朝霞暮霭中的奔走，多少伏案奋笔疾书，多少把盏短暂欢乐，多少路边挥手惜别，皆化作层层梦境；无论愿意与否，个人的浮沉荣辱，都不由自主地整体融进家国兴衰更迭；几乎还未来得及细品回味一下，人生就在一声微弱的叹息中恍然间走到了岁月的尽头。夕阳残照，往事斑驳；清风依故，旅程隐没。

在这其中，第一个面向是：付出的努力程度与所拥有的权势、财富、学识及施爱能力的饱和过程特征。

一个人或一个组织，其所拥有的权势、财富、学识及施爱能力，与付出努力的程度，存在着直接的密切关联，表现在权势、财富、学识及施爱能力—努力程度关系曲线上，基本呈现出饱和过程特征；即一定程度的努力，与相应能够获得的权势、财富、学识，及施爱的能力，在初期近似成正比缓慢增长，然后出现快速增长，随后渐近平缓增长、或呈现出衰减变化趋势。在突破原有层面后，进入下一个饱和演化过程；由若干阶段性饱和过程，构成一个更大范围、更高远层面的饱和过程。

第二个面向是：所拥有的权势、财富、学识及施爱能力与所能够达到的社会功能效果之间的饱和过程特征。

在所拥有的权势、财富、学识及施爱能力的一定程度上，也对应着相应的社会功能效果。表现在权势、财富、学识及施爱能力—社会功能效果关系曲线上，亦呈现出广义饱和过程特征；即在一定的权势、财富、学识及施爱能力，初期的社会功能效果不显著；达到一定程度后，会产生强大的社会功能效果，随后功能效果又趋于平缓，甚至是随着权势、财富、学识及施爱能力的程度加强会起到相反的社会功能效果，极端情况还会在后续各种相关势力的角逐与平衡中被强力瓦解及陷于王难的可能；古往今来，此例比比皆是。在突破原有层面后，则即开始下一阶段的变化；诸层累积，层层递进。由于在第一面向上权势、财富、学识，及施爱能力具有饱和特征，所以其社会功能效果亦存在着相应限度，或在进入后期后，其社会功能效果增加缓慢。

第三个面向是：在极端情况下学识及施爱的蠕变转化特征。

一方面，学识及施爱—努力程度曲线，具有一般的饱和过程特征；而在另一极端方面，当学识转化为智慧、施爱转化为慈悲后，则学识及施爱—努力程度曲线由原来的饱和性特征转化为蠕变性特征，其趋势性的状态即从有限转化为无限；这是与转化前的饱和、有限特征有紧密联系，但又完全不同的蠕变、无限特征状态，其部分地表征了东方古老文明的内典精要所在；个人精进修行超脱，然后转向带动大众共同提高，即个体先行、思想共和、普世等齐，乃关窍所在；内在本然的微许平等善意将可潜移默化地在长程显著改变人生（幻相）命运；其古典表述为“大学之道，在明明德，在亲民，在止于至善”，亦为“自觉，觉他，觉行圆满”等。

几乎近于同步地，由于学识及施爱转化为智慧和慈悲后具有蠕变无限的特征，所以其所对应的社会功能效果也随之向无限的方向发展。而权势与财富，则几乎稀有从有限转化为无限的途径；这是需要进一步深入研究探讨的方向。

在单一阶段的趋势层面，上述关于权势、财富、学识和施爱—努力程度关系，与社会功能效果—权势、财富、学识和施爱能力关系，二个演化饱和过程方程及学识和施爱转化为智慧和慈悲的蠕变过程皆可由方程（1.19）式予以描述，演化过程趋势曲线如图 1-2、图 1-3 所示。

在多阶段累积情况下，权势、财富、学识及施爱能力—努力程度关系曲线，权势、财富、学识及施爱能力—社会功能效果关系曲线，这二个饱和过程曲线可由方程（1.132）式在结束段当 $\alpha_{1S\Theta} \approx \alpha_{2S\Theta}$ 或 $|\alpha_{1S\Theta} - \alpha_{2S\Theta}| \ll \min\{\alpha_{1S\Theta}, \alpha_{2S\Theta}\}$ 时描述；其趋势性曲线如图 2-33 所示。

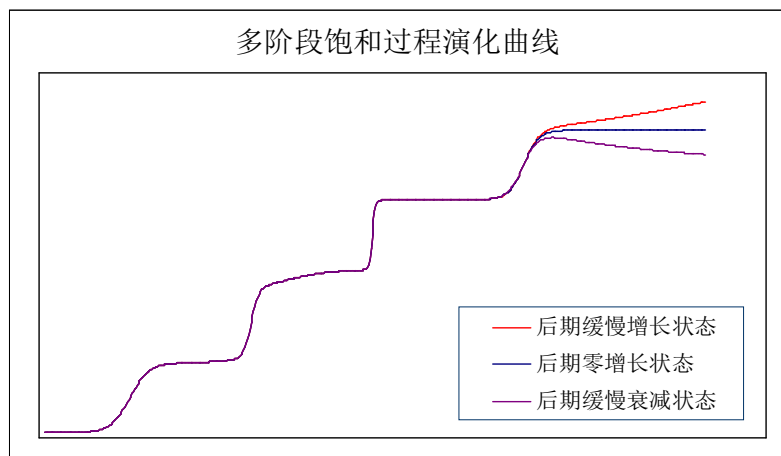


图 2-33 多阶段的饱和过程演化特征曲线

Fig. 2-33 Curve figure of the evolution characteristics of a multi-stage saturation process

在多阶段演化过程的极端情况下，学识和施爱转化为智慧后的学识和施爱能力—努力程度关系曲线、学识和施爱能力—社会功能效果关系曲线，这二个蠕变过程曲线可由方程（1.132）式在结束段当 $\alpha_{1S\Theta} \gg \alpha_{2S\Theta}$ 时予以相应的趋势性描述，其特征曲线如图 2-34 所示。

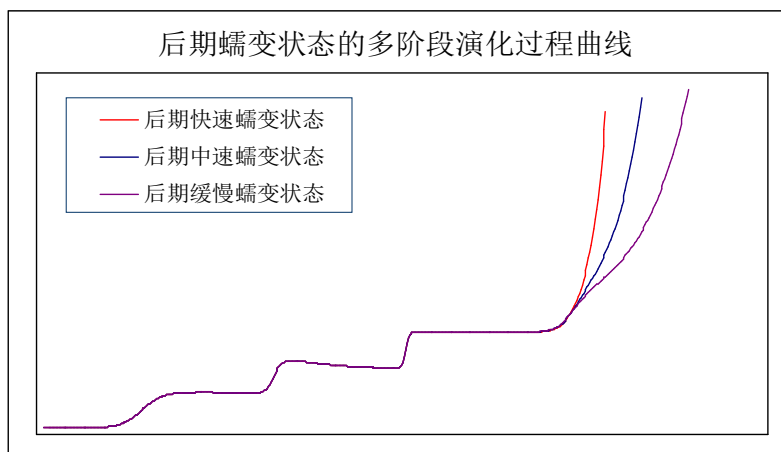


图 2-34 后期蠕变状态的多阶段演化过程曲线

Fig. 2-34 Curve figure of a multi-stage evolution process with the creep state in the later stage

权势及财富的要义是促进及加强诸如集中、集聚、执行和服从等因素，给予及授权多是等待收割及意图驱役；而智慧与慈悲则直接导向诸如平等、普世、开智和尊严等趋势，无执无著；对此进行有效的动态平衡与协调需要极高的技巧，为历代思想祖师及统治者所重视。

这其中，以智慧为导向的慈悲是无穷力量的重要源泉，智慧互济是觉行的主要体现。

提出思想、并以身作则践行思想，是十分艰辛的遥远旅程；进而能纵横捭阖、安邦定国、天下归心，则更为稀有珍贵。古往今来，毕竟亦君亦师或君师一体是极难成就的非凡高超境界；所谓小取取国，大取取心，无形摄有形，思想定志向；这也是在思想方向上开宗立派的祖师级人物往往与其当时所处时代的权力集团之间相互默契配合、留有余地、若即若离，但其思想内核却一般不为当时权力集团所完全认可及推崇的根本原因。

在尘世间，即使存在理想的治世明君或救世主，但其亦有所在层面的种种因缘际遇与操作时机，面临来自各层面的诸多挑战，在随同演进过程可能难以完全及时遍历施援救度。

极端地，所谓的救世主尚示现自救度，况复余者；是故，人生在基本保证简朴生存情况下，毅然走上觉行圣者大道是解脱轮回的根本出路；所遇皆是因缘教化，从幻觉悟知机回向。

圣者大道基本是：随缘示现觉悟苍生，平等慈悲无相智慧，无功用行凡圣一如。

圣者不会奴役盘剥及蒙蔽愚弄苍生，大道之外多为宿业惯性所致凡世交易的未道及外道。

此圣者大道之理虽极其浅显明了，但大道之行却极难自然离相忘道，其根源即在我法执。

特别地，对于根性敏利者，若直面并直接透过我法执，悟解我法执性本空寂，缠缚与解脱不二，则亦可直趣圣者大道。经行娑婆，示现自觉；微妙离相，庄严无界。

3 趋势性连接方程及非线性动力学方程形式的部分简略应用

下面从简学或维学的规律谱系（谱阵）角度对连接方程（1.19）式部分简略应用是与目前各相应领域已有理论体系描述并行的探索方向，其中覆盖多阶段的趋势性数据拟合是属于唯象分析方法，不具有原理层面解析意义，是暂时的、过渡性的描述，较为深入准确的阐释还需要建立诸如非线性动力学方程（1.1）中待定系数与现象固有特征参数的关系，给出极限解、波动解，及极限与波动复合解等诸条件解析解、近似等效解析解形式；或以逻辑解析为内核的普适构造方法，依据如广义偏对称方程（1.27）～（1.30）式、（1.32）式及（1.33）式等形式予以趋势描述。

3.1 岩石及单晶高温合金材料蠕变特性曲线趋势性拟合方程

本节介绍岩石及合金材料蠕变特性曲线的趋势拟合方程，蠕变数据特征来自资料 2～5。较之 Nishihara 模型等力学方程形式，本节从数据处理角度给出材料蠕变过程的趋势性方程。

基于参考资料 3 中的砂岩蠕变特性曲线数据（应变 $\varepsilon/\%$ —总时间间隔 t/min ），依据方程（1.19）式，其蠕变过程可用 $\varepsilon(t)$ 形式及 $t(\varepsilon)$ 形式描述，其中的 $t(\varepsilon)$ 形式趋势性拟合方程为

$$t = 40.2 + 40.2 \frac{\exp[32.25(\varepsilon - 0.672)] - \exp[-32.20(\varepsilon - 0.672)]}{2 \cosh[32.00(\varepsilon - 0.672)]}; \quad (3.1)$$

方程的拟合曲线如图 3-1 所示。

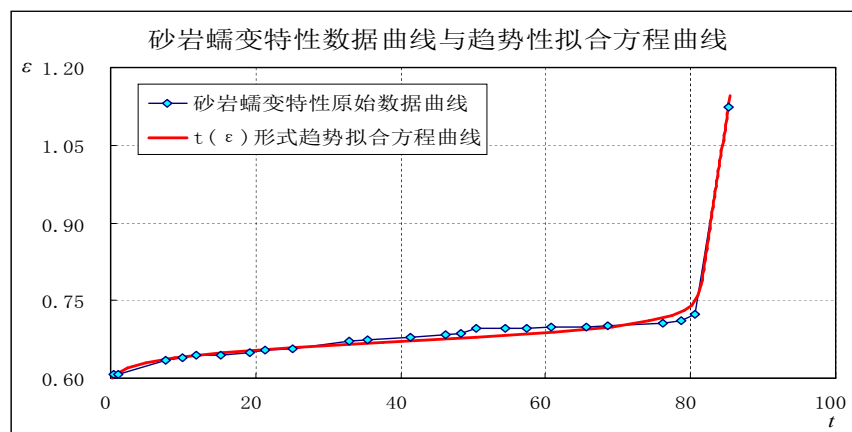


图 3-1 砂岩蠕变特性 $\varepsilon/\%$ — t/min 数据趋势性拟合方程曲线
(图中砂岩蠕变特性原始数据来自参考资料 3)

Fig. 3-1 Curve figure of tendency fitting equation of the strain-time data in creep characteristics of sandstone
(The original data of the strain-time in creep characteristics of sandstone was given by the reference 3)

基于参考资料 4 中的单晶高温合金蠕变数据（真应变 $\varepsilon/\%$ —时间 t/h ），依据方程（1.19）式及（1.120）式，其 $\varepsilon(t)$ 形式的趋势性拟合方程为

$$\varepsilon = [1 + 0.0068(t - 94)] \left[0.83 + 8.0 \times 10^{-5} \frac{\exp[0.0895(t - 94)] - \exp[-0.105(t - 94)]}{2 \cosh[0.005(t - 94)]} \right]; \quad (3.2)$$

方程曲线如图 3-2 所示； $\varepsilon(t)$ 方程与数据的相关系数为 0.9930。

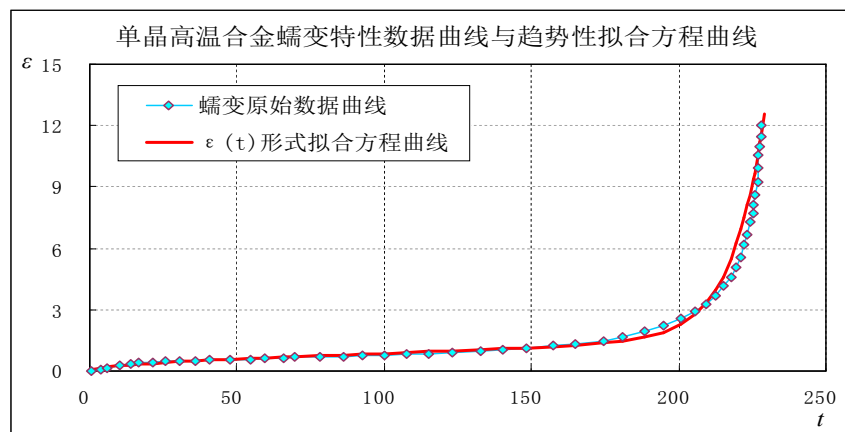


图 3-2 单晶高温合金真应变 $\varepsilon/\%$ —时间 t/h 蠕变数据趋势性拟合方程曲线
(图中单晶高温合金蠕变原始数据来自参考资料 4)

Fig. 3-2 Curve figure of tendency fitting equation of the true strain-time creep data of single-crystal superalloy
(The original data of the true strain-time creep of single-crystal superalloy was given by the reference 4)

基于参考资料 5 中的单晶高温合金蠕变数据（应变 $\varepsilon/\%$ —时间 t/h ），依据方程（1.19）式及（1.120）式，其 $t(\varepsilon)$ 形式及 $\varepsilon(t)$ 形式的趋势性拟合方程分别为

$$t = 187 + 187 \frac{\exp[1.264(\varepsilon - 2.6)] - \exp[-1.252(\varepsilon - 2.6)]}{2 \cosh[1.253(\varepsilon - 2.6)]}, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = [1 + 0.002(t - 197)] \left[2.6 + 6.0 \times 10^{-7} \frac{\exp[0.131(t - 197)] - \exp[-0.1255(t - 197)]}{2 \cosh[0.05(t - 197)]} \right]; \quad (3.4)$$

二个方程曲线如图 3-3 所示，可见 $\varepsilon(t)$ 形式（红色线）较 $t(\varepsilon)$ 形式（蓝色线）拟合效果好， $\varepsilon(t)$ 方程与数据的相关系数为 0.9894。

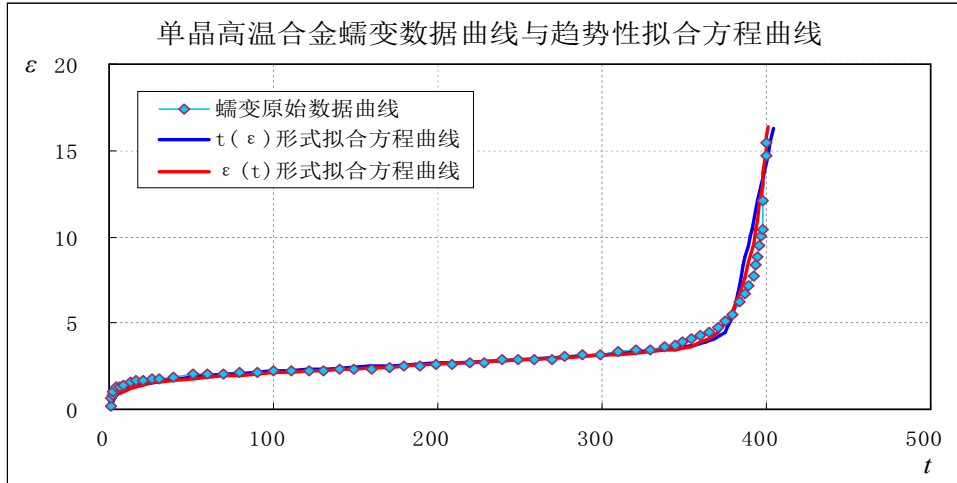


图 3-3 单晶高温合金应变 $\varepsilon/\%$ —时间 t/h 蠕变数据趋势性拟合方程曲线

（图中单晶高温合金蠕变原始数据来自参考资料 5）

Fig. 3-3 Curve figure of tendency fitting equation of the strain-time creep data of single-crystal superalloy
(The original data of the strain-time creep characteristics of single-crystal superalloy was given by the reference 5)

上述蠕变数据处理分析方法通用于材料衰减蠕变及非衰减蠕变过程曲线的趋势性探讨；这其中方程（3.2）、（3.4）二式在极端情况下，可直接简化为诸如 Nishihara 模型等方程条件解的形式。

3.2 半导体分立器件 V—A 特性曲线拟合方程

一般地，对于半导体分立器件，二极管（或 PN 结）的 V—A 特性曲线部分地或整体显著地具有蠕变曲线性质；三极管的输入 V—A 特性曲线与二极管 V—A 特性曲线类似，而输出 V—A 特性曲线在饱和区及放大区则具有饱和曲线性质；其中器件在击穿区具有蠕变曲线性质，即极限上器件的电学正向击穿及反向击穿特征与材料的力学断裂演变特征相对应。

依据方程（1.19）式，同时基于二极管（或 PN 结）的 V—A 特性曲线特征，其电压 U —电流 I 的趋势性拟合方程形式为

$$I = I_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(U - U_0)] - \exp[-\alpha_2(U - U_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(U - U_0)]}, \quad (3.5)$$

式中 U_0 、 A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 为待定常量， $I(U = U_0) = I_0$ 。

仅是在曲线趋势性拟合方面，还可表示为方程（3.5）式的坐标置换函数形式

$$U = U_{R0} + A_R \frac{\exp[\alpha_{R1}(I - I_{R0})] - \exp[-\alpha_{R2}(I - I_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_{R3}(I - I_{R0})]}, \quad (3.6)$$

这里 I_{R0} 、 A_R 、 α_{R1} 、 α_{R2} 、 α_{R3} 为待定常量， $U(I = I_{R0}) = U_{R0}$ 。

其中对于部分二极管，还可按正向特性与反向特性分别拟合其 V—A 曲线，以得到更为精确的拟合方程。

基于方程（3.5）、（3.6）二式，也可对部分反常 V—A 特性曲线局部进行趋势性拟合。

对于双向触发二极管，其 V—A 特性曲线的电压 U —电流 I 趋势性拟合方程为方程（1.111）式的级数简略展开形式

$$U = U_{01} \frac{\sinh(\alpha_1 I)}{\cosh(\alpha_2 I)} + U_{02} \tanh(\beta I), \quad (3.7)$$

这里 U_{01} 、 U_{02} 、 α_1 、 α_2 、 β 为待定常量， $U(I = 0) = 0$ ， $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ ， $\beta \sim \alpha_1$ 。

一个双向触发二极管 V—A 特性的趋势性方程曲线如图 3-4 所示。

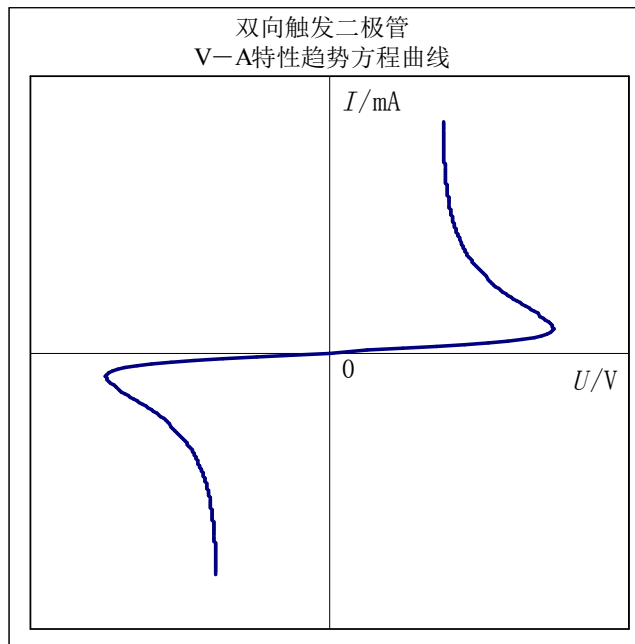


图 3-4 双向触发二极管 V—A 特性的趋势方程曲线

Fig. 3-4 Curve figure of tendency equation of the Volt-Ampere characteristics of the Bi-directional trigger diode

对于氧化锌 PN 结, 基于其特性曲线性质^[6], 参照方程 (3.5)、(3.6) 二式的形式, 可得其电压 U/V 与电流密度 $J/10^6 \text{ mA m}^{-2}$ 的 $U(J)$ 形式及 $J(U)$ 形式趋势性拟合方程分别为

$$U = -2.3 + 7.0 \frac{\exp[1.531(J + 0.15)] - \exp[-1.536(J + 0.15)]}{2 \cosh[1.500(J + 0.15)]}, \quad (3.8)$$

$$J = -0.16 + 0.06 \frac{\exp[0.58(U + 2.5)] - \exp[-0.59(U + 2.5)]}{2 \cosh[0.008(U + 2.5)]}; \quad (3.9)$$

方程曲线如图 3-5 所示; 可见方程 (3.9) 式 (红色线) 比 (3.8) 式 (深蓝色线) 拟合较好; $J(U)$ 方程与数据的相关系数为 0.9995。

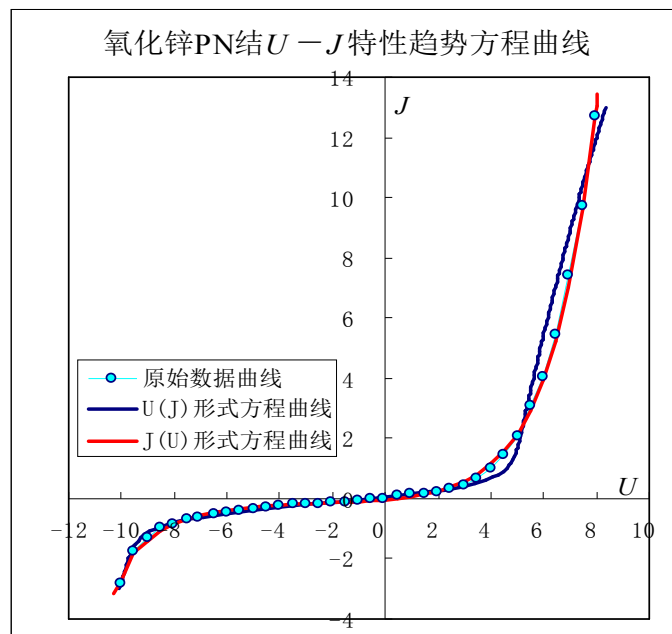


图 3-5 氧化锌 PN 结 $U/V - J/10^6 \text{ mA m}^{-2}$ 特性趋势方程曲线

(图中氧化锌 PN 结 $U-J$ 特性数据来自参考资料 6)

Fig. 3-5 Curve figure of tendency equation of the Voltage-Current density characteristics of the ZnO p-n junction
(The original data of the Voltage-Current density characteristics was given by the reference 6)

对于三极管，其在放大区及饱和区的输出 $V-A$ 特性曲线拟合方程 $I_C(U_{CE})$ 可表示为

$$I_C = I_{Cs0} + A_s \frac{\exp[\alpha_{s1}(U_{CE} - U_{CEs0})] - \exp[-\alpha_{s2}(U_{CE} - U_{CEs0})]}{2 \cosh[\alpha_{s3}(U_{CE} - U_{CEs0})]}, \quad (3.10)$$

式中 U_{CEs0} 、 A_s 、 α_{s1} 、 α_{s2} 、 α_{s3} 为待定常量， $I_C(U_{CE} = U_{CEs0}) = I_{Cs0}$ 。

在击穿区的趋势性方程可直接应用 (3.10) 式描述，也可用如下方程予以趋势性拟合

$$U_{CE} = U_{CEbr0} + A_{br} \frac{\exp[\alpha_{br1}(I_C - I_{Cbr0})] - \exp[-\alpha_{br2}(I_C - I_{Cbr0})]}{2 \cosh[\alpha_{br3}(I_C - I_{Cbr0})]}, \quad (3.11)$$

式中 I_{Cbr0} 、 A_{br} 、 α_{br1} 、 α_{br2} 、 α_{br3} 为待定常量， $U_{CE}(I_C = I_{Cbr0}) = U_{CEbr0}$ 。

方程 (3.11) 式的曲线如图 3-6 所示；其与图 2-3 相比较表明器件的电学击穿过程与材料的力学断裂过程相对应，皆可应用方程 (1.19) 式乃至其复合或叠加形式予以趋势性描述。

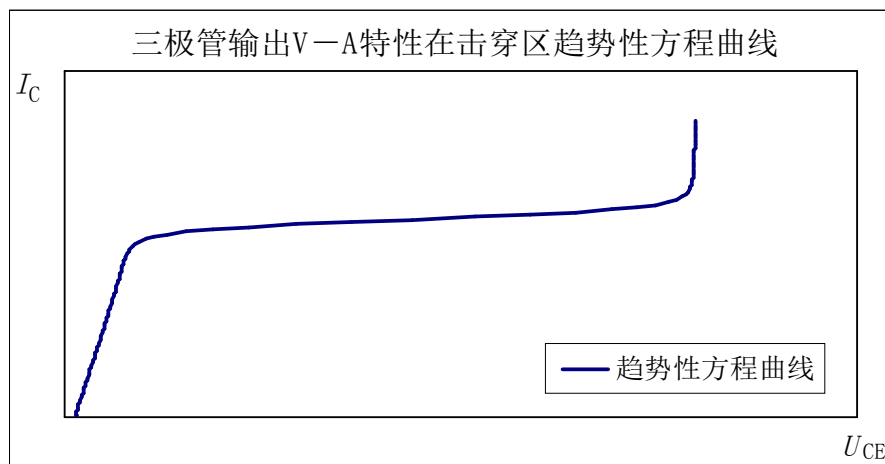


图 3-6 三极管输出 $V-A$ 特性在击穿区趋势性方程曲线

Fig. 3-6 Curve figure of tendency equation of the Output Volt-Ampere characteristics in the breakdown region of the triode

依据方程 (3.10) 式可得一 NPN 型三极管在放大区及饱和区 $V-A$ 特性数据的趋势性拟合方程，其可简化为方程 (1.24) 式的形式，方程略；方程曲线如图 3-7 所示。

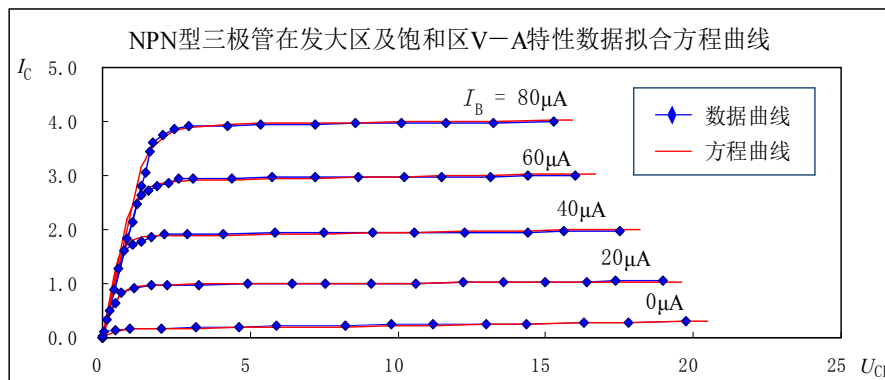


图 3-7 三极管 $V-A$ 特性数据 ($U_{CE}/V-I_C/mA$) 在放大区及饱和区的趋势性方程曲线

Fig. 3-7 Curve figure of tendency equation of the Volt-Ampere data in the active and saturation regions of the triode

在细节上蠕变和饱和过程，是一系列的能量累积、释放，再累积、再释过程，表现为多个阶段性的缓变、阶跃、平衡过程，呈现出宏观的类似量子化的周期性脉动或台阶效应。

3.3 超导材料在零电阻区域附近 $R-T$ 曲线及超导双晶结 $I-U$ 曲线趋势性拟合方程

对于超导材料在零电阻附近区域的 $R-T$ (电阻—绝对温度) 数据曲线^[7,8]，一般都具有趋势性广义饱和过程特征。曲线具有二个显著的折曲点，在第一个折曲点之前，曲线在 0 值附近为一水平线；在二个折曲点之间，曲线呈现出斜率较大的线性变化，乃至是近于阶跃性质的变化；在第二个折曲点之后，曲线呈现出较为缓慢的近似线性变化；即在零电阻值附近，曲线呈现出二个折曲点及一个拐点的三段直线特征。

一般地，当曲线在第二个折曲点之后再没有呈现出水平线状态时，则不能直接应用经典的双曲正切方程 (1.25) 式予以描述。

参照方程 (1.124) 式, 超导材料在零电阻附近区域的 $R-T$ 数据曲线趋势性拟合方程为

$$R = [1 + \tau(T - T_{R0})] \left[R_0 + A_1 \tanh[\alpha_0(T - T_{R0})] + A_2 \frac{\exp[\alpha_1(T - T_{R0})] - \exp[-\alpha_2(T - T_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_3(T - T_{R0})]} \right], \quad (3.12)$$

式中 τ 、 A_1 、 A_2 、 α_0 、 α_1 、 α_2 、 α_3 为待定常量, $T_{R0} = T_{c,m}$, $R(T = T_{R0}) = R_0$; $\alpha_3 = \alpha_2 + \Delta_\alpha$, $|\Delta_\alpha| \alpha_2^{-1} \ll 1$, Δ_α 为一待定值; 一般地, 可取

$$A_1 + A_2 \approx R_0, \quad \alpha_0 \approx \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)。$$

方程 (3.12) 式的形式也同样适用于超导材料在零电阻率附近区域的 $\rho - T$ (电阻率—绝对温度) 曲线趋势方程描述

$$\rho = [1 + \sigma(T - T_{\rho0})] \left[\rho_0 + B_1 \tanh[\beta_0(T - T_{\rho0})] + B_2 \frac{\exp[\beta_1(T - T_{\rho0})] - \exp[-\beta_2(T - T_{\rho0})]}{2 \cosh[\beta_3(T - T_{\rho0})]} \right], \quad (3.13)$$

式中 σ 、 B_1 、 B_2 、 β_0 、 β_1 、 β_2 、 β_3 为待定常量, $\rho(T = T_{\rho0}) = \rho_0$; $\beta_3 = \beta_2 + \Delta_\beta$, $|\Delta_\beta| \beta_2^{-1} \ll 1$, Δ_β 为一待定值; 同样地可取

$$B_1 + B_2 \approx \rho_0, \quad \beta_0 \approx \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)。$$

近似地, 当考虑 $R(0 < T \leq T_{c,0}) \approx 0$ 、 $\rho(0 < T \leq T_{c,0}) \approx 0$ 时, 则有 $\Delta_\alpha \approx 0$ 、 $\Delta_\beta \approx 0$, 即 $\alpha_3 = \alpha_2$ 、 $\beta_3 = \beta_2$, 方程 (3.12) 式、(3.13) 式则分别成为

$$R = [1 + \tau(T - T_{R0})] \left[R_0 + A_1 \tanh[\alpha_0(T - T_{R0})] + A_2 \frac{\exp[\alpha_1(T - T_{R0})] - \exp[-\alpha_2(T - T_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_2(T - T_{R0})]} \right]; \quad (3.14)$$

$$\rho = [1 + \sigma(T - T_{\rho0})] \left[\rho_0 + B_1 \tanh[\beta_0(T - T_{\rho0})] + B_2 \frac{\exp[\beta_1(T - T_{\rho0})] - \exp[-\beta_2(T - T_{\rho0})]}{2 \cosh[\beta_2(T - T_{\rho0})]} \right]。 \quad (3.15)$$

当 $A_1 \gg A_2$ 、 $B_1 \gg B_2$ 时, 方程 (3.14)、(3.15) 二式成为

$$R = R_0[1 + \tau(T - T_{R0})][1 + \tanh[\alpha_0(T - T_{R0})]]; \quad (3.16)$$

$$\rho = \rho_0[1 + \sigma(T - T_{\rho0})][1 + \tanh[\beta_0(T - T_{\rho0})]]。 \quad (3.17)$$

进而当 $\tau = 0$ 、 $\sigma = 0$ 时, 其分别转化为曲线平衡点附近区域的双曲正切方程 (1.25) 式形式

$$R = R_0[1 + \tanh[\alpha_0(T - T_{R0})]]; \quad (3.18)$$

$$\rho = \rho_0[1 + \tanh[\beta_0(T - T_{\rho0})]]。 \quad (3.19)$$

当 $A_1 \ll A_2$ 、 $B_1 \ll B_2$ 时, 方程 (3.14)、(3.15) 二式成为

$$R = R_0[1 + \tau(T - T_{R0})] \left[1 + \frac{\exp[\alpha_1(T - T_{R0})] - \exp[-\alpha_2(T - T_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_2(T - T_{R0})]} \right], \quad (3.20)$$

$$\rho = \rho_0[1 + \sigma(T - T_{\rho0})] \left[1 + \frac{\exp[\beta_1(T - T_{\rho0})] - \exp[-\beta_2(T - T_{\rho0})]}{2 \cosh[\beta_2(T - T_{\rho0})]} \right]。 \quad (3.21)$$

在零电阻或零电阻率附近的 $T > T_{R0}$ 、 $T > T_{\rho0}$ 区域, 当 $\tau(T - T_{R0}) \ll 1$ 、 $\sigma(T - T_{\rho0}) \ll 1$ 时, 方程 (3.20)、(3.21) 二式可进一步简化为

$$R = R_0 + R_0 \frac{\exp[\alpha_1(T - T_{R0})] - \exp[-\alpha_2(T - T_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_2(T - T_{R0})]}; \quad (3.22)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 \frac{\exp[\beta_1(T - T_{\rho0})] - \exp[-\beta_2(T - T_{\rho0})]}{2 \cosh[\beta_2(T - T_{\rho0})]}。 \quad (3.23)$$

同样地, 对于 (3.22)、(3.23) 二式, 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 、 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ 时, 其亦分别转化为曲线平衡点附近区域的双曲正切方程 (1.25) 式形式

$$R = R_0[1 + \tanh[\alpha(T - T_{R0})]]; \quad (3.24)$$

$$\rho = \rho_0[1 + \tanh[\beta(T - T_{\rho 0})]]。 \quad (3.25)$$

方程 (3.12)、(3.20)、(3.22)、(3.24) 诸式的部分 $R-T$ 曲线如图 3-8 所示 (其中包括 $\Delta_\alpha < 0$ 、 $\Delta_\alpha > 0$ 、 $\Delta_\alpha = 0$ 三种情况)。

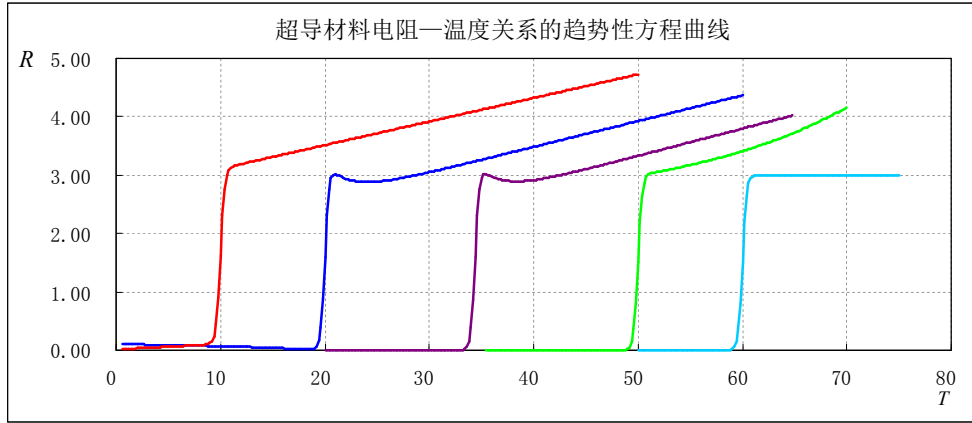


图 3-8 超导材料在零电阻附近区域电阻 $R/\Omega - T/K$ 特性方程曲线

Fig. 3-8 Curve figure of tendency equation of the resistance-absolute temperature characteristics near the zero resistance value for the superconducting material

方程 (3.13)、(3.17)、(3.23)、(3.25) 诸式的部分 $\rho - T$ 曲线如图 3-9 所示 (其中包括 $\Delta_\beta < 0$ 、 $\Delta_\beta > 0$ 、 $\Delta_\beta = 0$ 三种情况)。

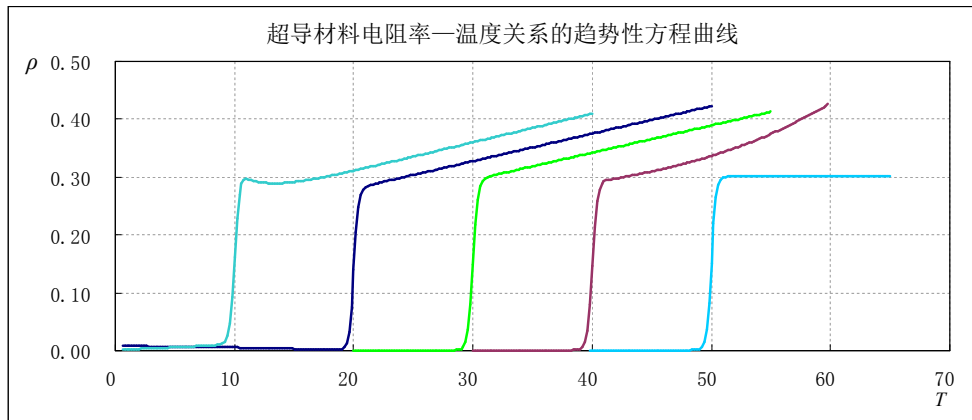


图 3-9 超导材料在零电阻率附近区域电阻率 $\rho/m\Omega \text{ cm} - T/K$ 特性方程曲线

Fig. 3-9 Curve figure of tendency equation of the resistivity-absolute temperature characteristics near the zero resistivity value for the superconducting material

与目前已有实验数据曲线^[7,8]相比较, 由超导材料温度特性方程 (3.12) ~ (3.25) 式给出的图 3-8、图 3-9 中部分曲线形态更加多样化, 其为深入广泛地探索超导材料温度特性提供参考。

将现象的演化过程依照数据变化特征进行唯象层面的规律分析, 具有探索性意义。

方程 (3.12)、(3.13) 二式主要描述局部曲线, 对于较长程曲线, 可考虑如下方程拟合

$$R = \sum_{j=1}^{n_R} R_j, \quad (3.26)$$

$$\rho = \sum_{j=1}^{n_\rho} \rho_j, \quad (3.27)$$

式中 n_R 、 n_ρ 为依据具体曲线特征 (如波动或台阶等曲线起伏细节) 待定的自然数。

基于参考资料 7 中的超导材料电阻率 ($\rho/\text{m}\Omega\text{cm}$)—绝对温度 (T/K) 数据, 依据方程 (3.21)、(3.23) 二式, 可得其第一组数据、第二组数据的趋势性拟合方程分别为

$$\rho = 0.15[1 + 0.0183(T - 27.5)] \left[1 + \frac{\exp[0.863(T - 27.5)] - \exp[-0.860(T - 27.5)]}{2 \cosh[0.860(T - 27.5)]} \right], \quad (3.28)$$

$$\rho = 0.17 + 0.17 \frac{\exp[1.847(T - 54)] - \exp[-1.800(T - 54)]}{2 \cosh[1.800(T - 54)]}; \quad (3.29)$$

二组数据的趋势性拟合方程曲线如图 3-10 所示; 方程 (3.28) 式、(3.29) 式与所拟合数据的相关系数分别为 0.9992、0.9987。

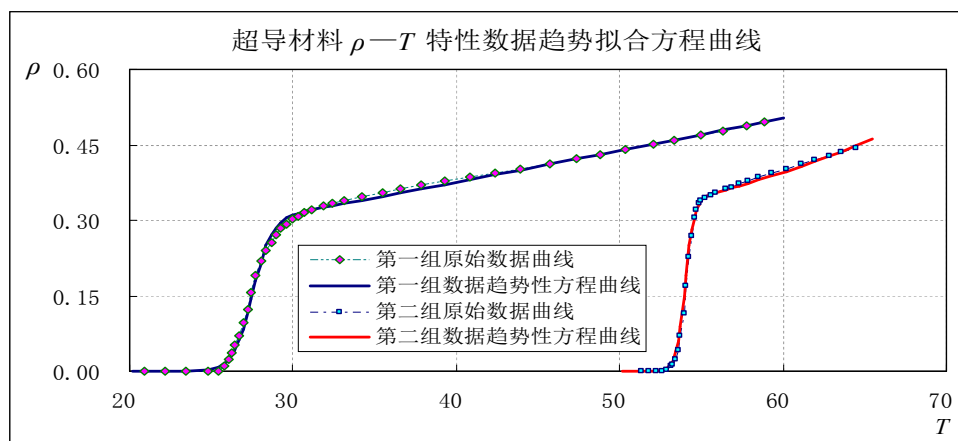


图 3-10 超导材料在零电阻率附近区域电阻率 $\rho/\text{m}\Omega\text{cm}$ — T/K 数据趋势性拟合方程曲线
(图中超导材料 $\rho-T$ 原始数据来自参考资料 7)

Fig. 3-10 Curve figure of tendency fitting equation of the resistivity-absolute temperature characteristics near the zero resistivity value for the superconducting material
(The original data of the resistivity-absolute temperature characteristics was given by the reference 7)

基于参考资料 8 中的超导 YBCO/PCCO 双晶结电阻 R/Ω —绝对温度 T/K 特性曲线形态, 由方程 (3.22)、(3.16) 二式可得其趋势性拟合方程为

$$R = 0.78 + 0.78 \frac{\exp[1.0069(T - 11)] - \exp[-1.0(T - 11)]}{2 \cosh[1.0(T - 11)]} + 0.46[1 + 0.0204(T - 93)][1 + \tanh[1.0(T - 93)]]; \quad (3.30)$$

方程曲线如图 3-11 所示; 方程与数据的相关系数为 0.9989。

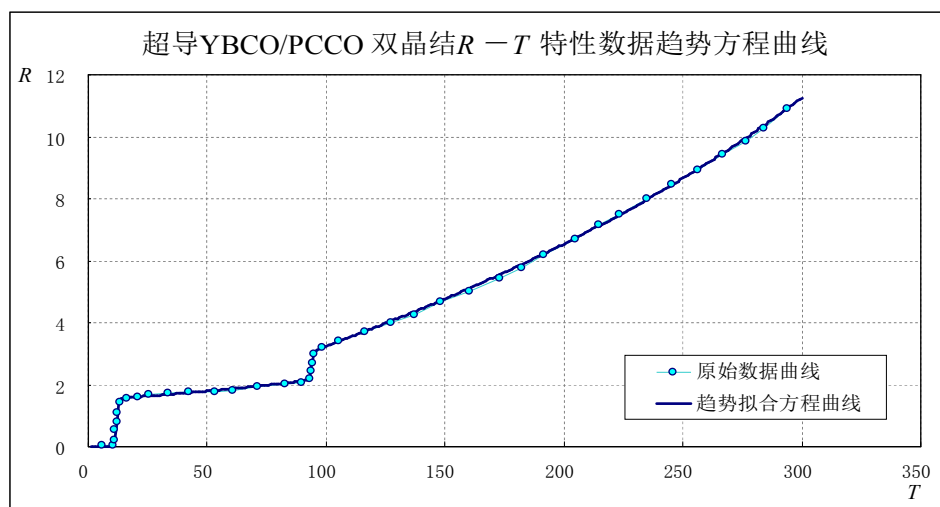


图 3-11 超导 YBCO/PCCO 双晶结在零电阻附近区域电阻 R/Ω —温度 T/K 数据方程曲线
(图中超导 YBCO/PCCO 双晶结电阻 R —温度 T 特性数据来自参考资料 8)

Fig. 3-11 Curve figure of tendency fitting equation of the resistance-absolute temperature characteristics near the zero resistance value for the superconducting YBCO/PCCO bilayer junction
(The original data of the resistance-absolute temperature characteristics was given by the reference 8)

对于高温超导双晶 Josephson 结的直流 $I-U$ 特性曲线, 参照方程 (1.125) 式, 可得其趋势性的 7 参数 (待定系数) 拟合方程形式为

$$I = [1 + \eta|U|] \left[I_{\text{bj1}} \tanh[\alpha_{\text{bj0}}U] + I_{\text{bj2}} \frac{\exp(\alpha_{\text{bj1}}U) - \exp(-\alpha_{\text{bj2}}U)}{2 \cosh(\alpha_{\text{bj3}}U)} \right], \quad (3.31)$$

式中 η 、 I_{bj1} 、 I_{bj2} 、 α_{bj0} 、 α_{bj1} 、 α_{bj2} 、 α_{bj3} 为待定常量, $|U|$ 为 U 的绝对值; $I_{\text{bj1}} + I_{\text{bj2}} \geq I_{\text{JP}}$, $I_{\text{JP}} \approx 0.5I_{\text{JDC}}$, 这里 I_{JDC} 为 Josephson 结直流 $I-U$ 特性曲线在 $U=0$ 附近微小区间 ($\pm \Delta U$) 的电流阶跃幅值。

依据方程 (3.31) 式, 当 $U=0$ 时, 有

$$I(U=0) = 0. \quad (3.32)$$

在 $U=0$ 的附近 $\eta|U| \ll 1$ 区域, 方程 (3.32) 式成为

$$I = I_{\text{bj1}} \tanh[\alpha_{\text{bj0}}U] + I_{\text{bj2}} \frac{\exp(\alpha_{\text{bj1}}U) - \exp(-\alpha_{\text{bj2}}U)}{2 \cosh(\alpha_{\text{bj3}}U)}. \quad (3.33)$$

一般简单地, 当 $\alpha_{\text{bj1}} = \alpha_{\text{bj2}}$ 时, 方程 (3.32) 式即简化为 6 参数 (待定系数) 形式

$$I = [1 + \eta|U|] \left[I_{\text{bj1}} \tanh[\alpha_{\text{bj0}}U] + I_{\text{bj2}} \frac{\sinh(\alpha_{\text{bj1}}U)}{\cosh(\alpha_{\text{bj3}}U)} \right]. \quad (3.34)$$

当 $|\alpha_{\text{bj1}}| \ll |\alpha_{\text{bj3}}|$ 时, 则在

$$|I_{\text{bj1}} \tanh[\alpha_{\text{bj0}}U]| \gg \left| I_{\text{bj2}} \frac{\sinh(\alpha_{\text{bj1}}U)}{\cosh(\alpha_{\text{bj3}}U)} \right|$$

区域, 方程 (3.34) 式进一步简化为如下二形式

$$I = I_{\text{bj1}}[1 + \eta|U|] \tanh[\alpha_{\text{bj0}}U]; \quad (3.35)$$

$$I \approx I_{\text{bj1}}[1 + \eta|U|]. \quad (3.36)$$

方程 (3.31) 式在 $|\alpha_{\text{bj1}}| < |\alpha_{\text{bj3}}|$ 、 $|\alpha_{\text{bj2}}| < |\alpha_{\text{bj3}}|$ 时的一典型曲线如图 3-12 所示; 图中 $I_{\text{JDC}} = 2.0 \text{ mA}$, $I_{\text{JP}} = 0.5I_{\text{JDC}} = 1.0 \text{ mA}$ 。

当二待定系数 $\alpha_{\text{bj1}} \neq \alpha_{\text{bj2}}$ 时, 方程 (3.31) 式所描述的曲线在第 I、第 III 象限不完全对称, 而当 $\alpha_{\text{bj1}} = \alpha_{\text{bj2}}$ 时, 则曲线在第 I、第 III 象限完全对称。

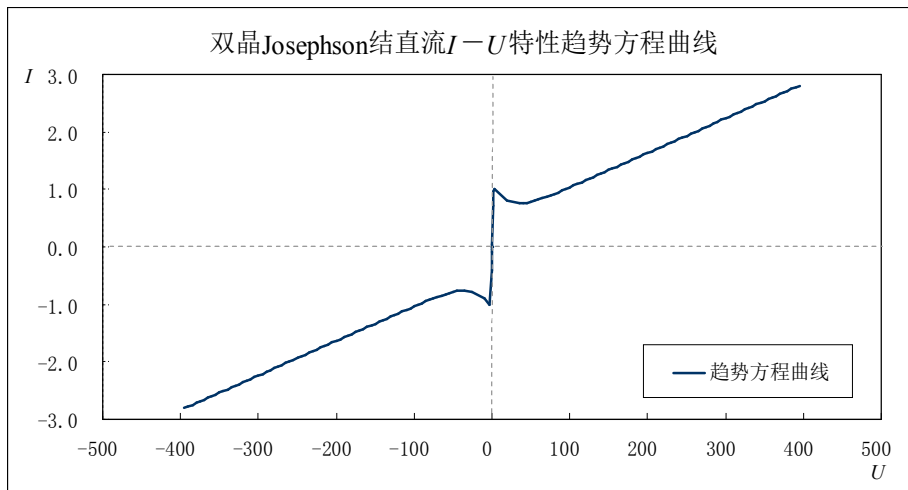


图 3-12 双晶 Josephson 结直流 $I/\text{mA}-U/\mu\text{V}$ 特性趋势方程曲线

Fig. 3-12 Curve figure of tendency equation of the direct current $I-U$ characteristics of the bicrystal Josephson junction

对于一具体的双晶 Josephson 结直流 $I/\text{mA}-U/\mu\text{V}$ 特性曲线数据^[9], 可考虑近似地取 $\alpha_{\text{bj0}} \approx 0.5(\alpha_{\text{bj1}} + \alpha_{\text{bj3}})$, 则方程 (3.34) 式成为 5 参数 (待定系数) 的拟合方程; 其对资料 9 中的双晶 Josephson 结直流 $I/\text{mA}-U/\mu\text{V}$ 特性曲线数据趋势性拟合形式为

$$I = [1 + 0.0109|U|] \left[0.3 \tanh(0.81U) + 0.2 \frac{\sinh(0.80U)}{\cosh(0.82U)} \right]. \quad (3.37)$$

方程曲线如图 3-13 所示；方程与数据的相关系数为 0.9925。

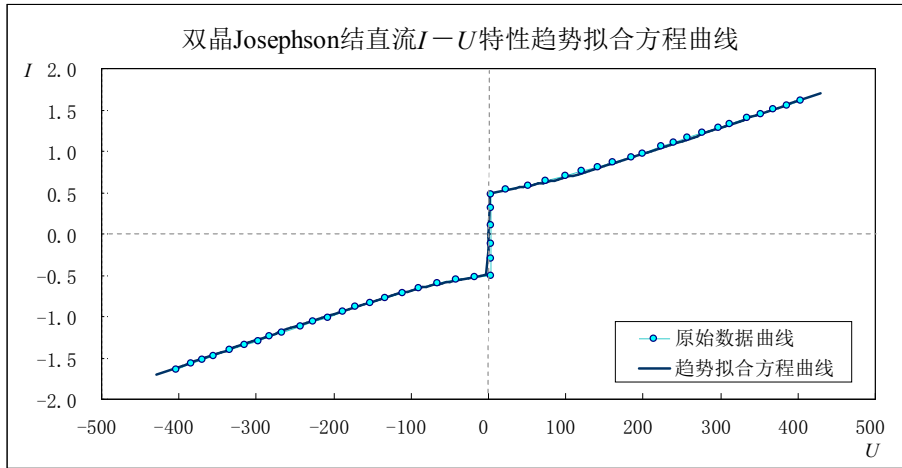


图 3-13 双晶 Josephson 结直流 $I/\text{mA}-U/\mu\text{V}$ 特性数据趋势方程曲线

(图中双晶 Josephson 结 $I-U$ 特性原始数据曲线来自参考资料 9)

Fig. 3-13 Curve figure of tendency fitting equation of the direct current $I-U$ characteristics of the bicrystal Josephson junction

(The original data of the direct current $I-U$ characteristics was given by the reference 9)

上述关于超导材料 R (或 ρ) $-T$ 特性数据趋势拟合方程 (3.12)、(3.13) 二式及双晶 Josephson 结直流 $I-U$ 特性数据趋势拟合方程 (3.31) 式、简化方程 (3.34) 式, 由于方程中后二项 ($\tanh$ 和其扩展形式) 的叠加及与线性项相乘, 使得趋势拟合方程具体形式不具有唯一性, 即可有几个方程具体形式都能够在趋势层面上拟合同一条特性数据曲线。

3.4 Shapiro 台阶电流阶跃幅值曲线的趋势性拟合方程

作为初步分析注释, 下面简略探讨 Shapiro 台阶电流阶跃幅值的趋势性方程形式, 其不具有一般的普适性及基础性, 只适合部分曲线, 而且尚不能用于数值精确计算, 仅为在目前传统的微分方程分析方法之外探索一并行描述途径, 亦为微分方程分析方法提供演绎远景的参考框架及数值解析时的参考方程形式。

基于双晶 Josephson 结的直流 $I-U$ 特性曲线趋势方程 (3.31) 式与已知的 Shapiro 台阶电压 U_n 位置方程

$$U_n = \frac{hf}{2e}n,$$

上式中 h 为 Planck 常数, e 为电子电荷量, f 为辐照微波的频率, n 为整数; 及考虑到叠加 Shapiro 台阶后的 $I-U$ 曲线^[9]在第一象限与第三象限的近似对称性特征, 当分析曲线在第一象限的性质时, 可取 n 为非负整数 ($n = +0, +1, +2, +3, \dots$), 则可初步构造在 Josephson 结直流 $I-U$ 特性曲线上叠加的 Shapiro 台阶电流阶跃幅值 I_{JSn} 方程形式为

$$I_{JSn} = I_{JSL}(n+b)\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta]), \quad (3.38)$$

这里 $I_{JSL} > 0$ 、 $b \geq 0$ 、 $q_0 > 0$ 为待定常量, $\zeta > 0$ 为待定参量, $\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta])$ 为关于 $\exp[-q_0(n+b)\zeta]$ 的待定函数; b 与 I_{JS+0} 密切相关。

方程 (3.38) 式是依据方程 (3.31) 式及 Shapiro 台阶电压位置方程构造出的表述形式, 而不是以其为基础严格推导出来的方程。其中将 $n = 0$ 拆分为 $n = +0$ 与 $n = -0$ 二部分主要是象限曲线分析的需要。

方程 (3.38) 式表明在 Shapiro 台阶电流阶跃幅值中主要包含一线性表述部分 $I_{JSL}(n+b)$, 及一非线性函数部分 $\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta])$; 其中函数 $\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta])$ 一至为简略的表述形式即为

$$\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta]) = A_{\exp} \exp[-q_0(n+b)\zeta], \quad (3.39)$$

式中 $A_{\exp}$ 为待定常量。

由方程 (3.38)、(3.39) 二式得在第一象限 ($n = +0, +1, +2, +3, \dots$) Shapiro 台阶电流阶跃幅值 I_{JSn} 的趋势性方程形式近似表示为

$$\begin{aligned} I_{JSn} &= I_{JSL} (n+b) [A_{\exp} \exp[-q_0(n+b)\zeta]] \\ &= [I_{JSL} A_{\exp} \exp(-q_0 b \zeta)] (n+b) \exp(-q_0 \zeta n) \\ &= I_{JSH} (n+b) \exp(-qn), \end{aligned} \quad (3.40)$$

式中 $I_{JSH} = I_{JSL} A_{\exp} \exp(-q_0 b \zeta)$, $q = q_0 \zeta$ 。

由曲线的对称性亦得在第三象限 ($n = -0, -1, -2, -3, \dots$) 时的趋势性方程

$$I_{JSn} = I_{JSH} (-n+b) \exp(qn); \quad (3.41)$$

即 Shapiro 台阶电流阶跃幅值的趋势性方程近似形式为

$$I_{JSn} = I_{JSH} [|n|+b] \exp[-q|n|], \quad (3.42)$$

式中 $|n|$ 为 n 的绝对值, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。

数据分析时, 由于曲线在第一象限与第三象限未必是完全对称性质的, 所以方程 (3.40)、(3.41) 二式中的系数亦将会有微小变化。

作为对方程 (3.40) 式朝基本原理方向的延伸讨论, 引入二个参量 ϕ 及 ζ , 其与 I_{JSn} 及 n 满足关系方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + q_0(n+b)\phi = 0, \\ I_{JSn} + g \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = 0, \end{cases} \quad (3.43)$$

式中 q_0 、 b 、 g 为待定常量。

由方程 (3.43) 式得

$$\phi = \phi_0 \exp[-q_0(n+b)\zeta], \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} I_{JSn} &= g \phi_0 q_0 (n+b) \exp[-q_0(n+b)\zeta] \\ &= [g \phi_0 q_0 \exp(-q_0 b \zeta)] (n+b) \exp(-q_0 \zeta n) \\ &= I_{JSH} (n+b) \exp(-qn), \end{aligned} \quad (3.45)$$

式中 ϕ_0 为待定系数, $I_{JSH} = g \phi_0 q_0 \exp(-q_0 b \zeta)$, $q = q_0 \zeta$ 。

由方程 (3.40)、(3.45) 二式得

$$I_{JSL} A_{\exp} = g \phi_0 q_0. \quad (3.46)$$

根据方程 (3.40)、(3.41) 二式得在 $n = 0$ 时的 Shapiro 台阶电流阶跃幅值 I_{JS0} 近似为

$$I_{JS0} = I_{JS-0} + I_{JS+0} = I_{JSH} b + I_{JSH} b = 2I_{JSH} b. \quad (3.47)$$

对于部分曲线, Shapiro 台阶电流阶跃幅值在整体上 ($n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) 近似有

$$\sum_n I_{JSn} \approx I_{JDC}. \quad (3.48)$$

仍需指出, 因为方程 (3.38) 式的非解析表述及方程 (3.39) 式的强近似性质, 所以方程 (3.42) 式仅是数值趋势性描述方程, 尚不具有原理层面的深刻意义。

在确定方程的待定系数过程中, 一次求解还不能给出方程最终形式, 需要进行几次细调以达到兼顾诸台阶幅值的趋势状态; 其中 b 可由前 3 个或 4 个台阶幅值的联立方程初步给出, 当 b 无解时还需重组联立方程再解出 b , 然后初步求解 q 和 I_{JSH} 。对于极特殊情况, 可先预置一个 b 值, 然后初步求解 q 和 I_{JSH} , 再将方程计算数据与原始阶跃幅值数据相比较, 通过每次一个变化量 Δb 调节 b 值给出新的 q 和 I_{JSH} 以不断改变方程, 逐步达到方程计算数据与原始阶跃幅值数据较好的接近状态。方程细调时 b 主要由 I_{JS0} 作为关键指标确定, I_{JSH} 主要由前 3 个或 4 个台阶幅值作为关键指标确定, q 主要由前 6 个台阶幅值的衰减趋势作为关键指标确定。其中初步求解给出方程基本概貌, 细调过程给出方程具体形式。

计算第三象限曲线时, 一般其与在第一象限不完全对称, 可根据曲线在第三象限的状态特征对方程中诸系数进行适当微调。

3.5 机械系统或伺服系统摩擦力—速度特性曲线的趋势性方程(包括反常摩擦迟滞效应和复合摩擦迟滞效应的预言及其曲线形态特征描述)

图 3-11 曲线形态特征及趋势性拟合方程 (3.31) 式、简化形式 (3.34) 式, 从 (3.31) 式的 7 参数(待定系数)形式简化到 (3.34) 式的 6 参数形式, 其在类如机械系统或伺服系统摩擦力—速度(滑动速度)关系特性曲线及描述方程^[10~14]中 Stribeck 摩擦、Coulomb 摩擦及黏性摩擦(或粘滞摩擦、粘性摩擦)复合演化等现象非线性过程的并行分析方面, 具有唯象描述的参考意义。同样, 机械系统或伺服系统的已有摩擦模型对于并行探索诸如上述高温超导双晶 Josephson 结的直流 $I-U$ 特性曲线拟合方程等方面, 亦具有框架层面的参照意义。

作为探讨, 在远景上一个重要的方向是, 组建介质临界界面综合学科: 临界学或容学—Crinifanics or Confanics, 以整合并延展表面物理(物体与真空间交界面的物理特征)、膜及空腔结构、生物膜系统、临界相变、介质界面交互作用、过滤与单向带通及带阻效应、掺杂逆转及反常效应、器件传感及叠层转换、信息转换及信息存储、晶体生长操控、摩擦及损伤、侵蚀及渗透、饱和及截止、蠕变及振动、断裂及击穿、层流及湍流等一系列相关研究方向。

对于机械系统或伺服系统的摩擦力 F_R —速度 u 稳态关系特性曲线, 目前以分段拟合、方程中包含符号函数 $\text{sgn}(u)$ 的形式较多。参照方程 (1.125) 式, 或直接参照图 3-11 曲线形态特征及方程 (3.34) 形式, 可初步给出并行分析的摩擦力 (F_R/N)—速度 (u/ms^{-1}) 关系特性曲线的 6 参数趋势性描述方程形式为

$$F_R = \left[F_{St} \frac{\sinh(\alpha_{St}u)}{\cosh(\beta_{St}u)} + F_{Co} \tanh[\alpha_{Co}u] \right] [1 + \eta_{Vi}|u|], \quad (3.49)$$

这里 F_{St} 、 α_{St} 、 β_{St} 为与 Stribeck 效应相关的待定常量, $\beta_{St} > \alpha_{St} > 0$; F_{Co} 、 α_{Co} 为与 Coulomb 摩擦相关的待定系数; $F_{Co} + F_{St} \geq F_S$; η_{Vi} 为与黏性摩擦相关的待定系数, $|u|$ 为速度 u 的绝对值; 因 $F_R(u=0) = 0$, 故 F_S 为 F_R-u 特性曲线中的等效最大静摩擦力, 即 F_S 为在 $u=0$ 附近微小区间 ($\pm \Delta u$) 摩擦力 F_R 的单向阶跃最大幅值, 直观上其表现为从局部变形滑动到整体相对滑动的临界摩擦力; 简单地, 方程中取黏性摩擦为线性的黏性摩擦。

方程 (3.49) 式在趋势层面涵盖着 Coulomb 摩擦、Stribeck 摩擦及黏性摩擦相复合的非线性演化过程特征; 其中描述 Stribeck 摩擦部分与已有资料表述形式些许不同, 但基本等效于已有资料中描述 Stribeck 摩擦方程曲线几何形状调节系数取 1 的情况; 故方程 (3.49) 式仅是对机械系统或伺服系统摩擦力—速度特性曲线在速度 $u \neq 0$ 区域的部分唯象趋势探讨。

对于方程 (3.49) 式, 在主要讨论方程曲线形态的情况下, 诸待定系数可依据速度 u 的实际数据按比例进行相应调整, 其—具体参考形式为

$$F_R = \left[1.02 \frac{\sinh(1.37u)}{\cosh(1.49u)} + 0.60 \tanh[3.81u] \right] [1 + 0.004|u|]; \quad (3.50)$$

该方程在速度 u 的每一点皆有唯一确定的摩擦力 F_R 值, 所描述的曲线形态如图 3-14 所示。

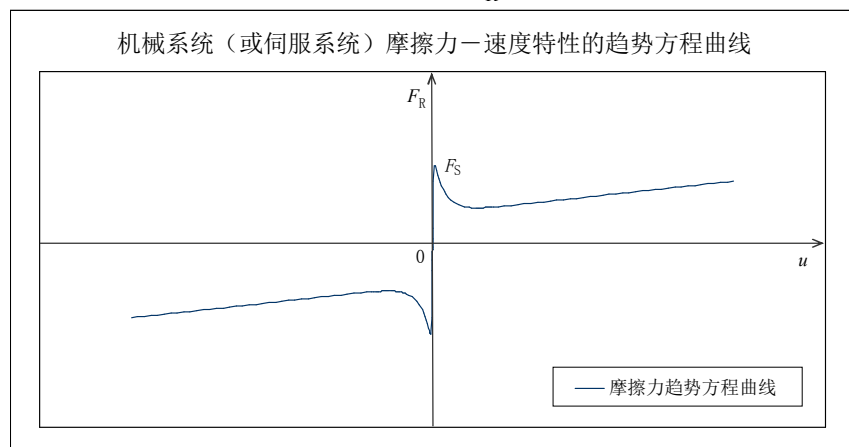


图 3-14 机械系统(或伺服系统)摩擦力—速度特性的趋势方程曲线

Fig. 3-14 Curve figure of tendency equation of the friction-speed characteristics in mechanical system or servo system

作为对机械系统或伺服系统摩擦力 F_R —速度 u 关系特性中最大静摩擦力附近区域的深入探讨, 参照方程 (1.124) 式或 (3.49) 式, 可给出低速时—拓展的 6 参数趋势性方程形式

$$F_R = F_{St} \frac{\sinh(\alpha_{St}u)}{\cosh(\beta_{St}u)} + F_{NL} \frac{\sinh(\alpha_{NL}u)}{\cosh(\beta_{NL}u)}, \quad (3.51)$$

其中 F_{St} 、 α_{St} 、 β_{St} 仍为与 Stribeck 效应相关的待定系数； F_{NL} 、 α_{NL} 、 β_{NL} 为与非线性摩擦效应相关的待定系数，联合描述 Coulomb 摩擦及黏性摩擦，兼顾曲线的非线性特性。

在方程 (3.51) 式中，一般可考虑取 $\alpha_{NL} \geq \beta_{NL} > 0$ 。

为更直观地讨论方程 (3.51) 式的曲线趋势形态特征，可给出其具体方程形式为

$$F_R = 1.00 \frac{\sinh(1.51u)}{\cosh(1.55u)} + 0.45 \frac{\sinh(1.246u)}{\cosh(\beta_{NL}u)}, \quad (3.52)$$

式中 β_{NL} 分别取值为 1.239、1.242，二个取值所对应的方程曲线形态如图 3-15 所示；当 $\beta_{NL} = 1.239$ 时，方程曲线在黏性摩擦阶段即具有较为显著的非线性特征；而当 $\beta_{NL} = 1.242$ 时，方程曲线在黏性摩擦阶段则具有较好的局部线性特征。

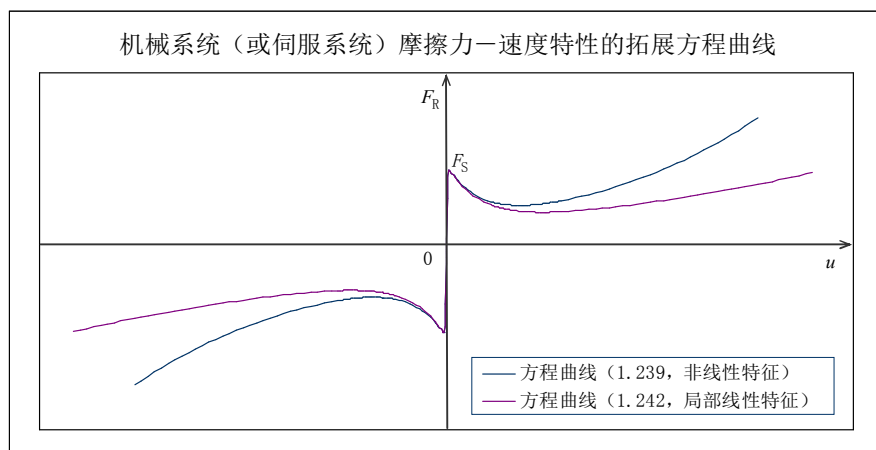


图 3-15 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度特性的拓展趋势方程曲线

Fig. 3-15 Curve figure of extended tendency equations with the nonlinear properties or the local linear properties of the friction-speed characteristics in mechanical system or servo system

方程 (3.49)、(3.51) 二式是对机械系统或伺服系统在低速时 $u \neq 0$ 区域摩擦力 F_R —速度 u 关系特性曲线的唯象趋势描述，同时对于建立临界摩擦力与外力速率的直接关系方程亦具有参考意义。

作为对临界摩擦力 F_B 与外力速率 r_{af} 关系特性的初步探讨，参照方程 (1.125) 式或方程 (3.51) 式，可给出一简略趋势性 $F_B - r_{af}$ 方程形式为

$$F_B = F_{af} \frac{\sinh(\alpha_{af} r_{af})}{\cosh(\beta_{af} r_{af})} + F_{B0} \tanh(\alpha_{B0} r_{af}), \quad (3.53)$$

这里 F_{af} 、 α_{af} 、 β_{af} 为与临界摩擦力 (F_B/N) 随外力速率 (r_{af}/Ns^{-1}) 衰减过程相关的待定系数，一般取 $\beta_{af} > \alpha_{af} > 0$ ； F_{B0} 、 α_{B0} 与临界摩擦力稳定曲线段特征相关的待定系数。

方程 (3.53) 式的一趋势性曲线形态如图 3-16 所示。

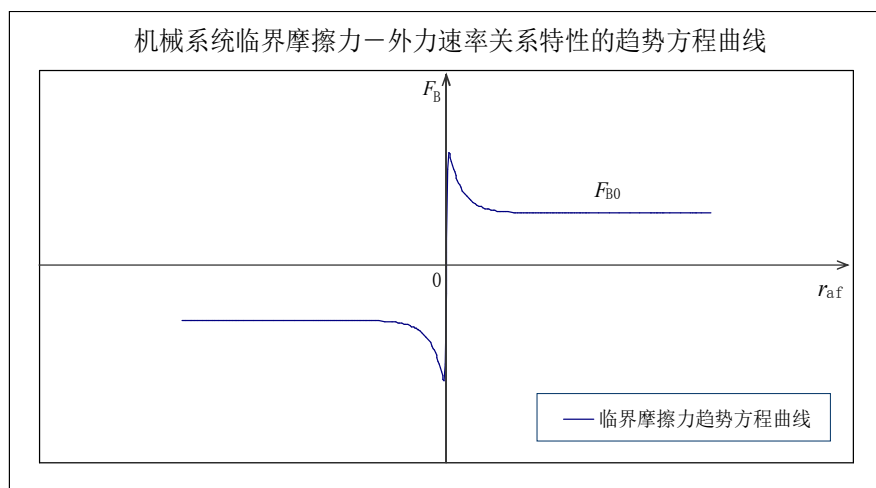


图 3-16 机械系统（或伺服系统）临界摩擦力—外力速率关系特性的趋势方程曲线

Fig. 3-16 Curve figure of tendency equation of the relation characteristics between break-away force and rate of increase of the applied force in mechanical system or servo system

上述方程讨论了机械系统或伺服系统摩擦力在速度增加方向(正向)与速度减小方向(逆向)相同路径的方程形式及其曲线形态;对于正向与逆向不同路径下的摩擦力—速度迟滞特性,在数学表述上参照方程(1.125)式或方程(3.49)、(3.51)二式可给出摩擦迟滞时的趋势描述方程形式为

$$F_{RIu\uparrow} = \left[F_{St} \frac{\sinh[\alpha_{St}u] + \kappa_h \sinh[\gamma_{St}[u + \tau_h|u|]]}{\cosh[\beta_{St}u]} + F_{Co} \tanh[\alpha_{Co}u] \right] [1 + \eta_{Vi}|u|], \quad (3.54)$$

$$F_{RIu\downarrow} = \left[F_{St} \frac{\sinh[\alpha_{St}(u + u_0)] + \kappa_h \sinh[\gamma_{St}[(u + u_0) - \tau_h|u + u_0|]]}{\cosh[\beta_{St}(u + u_0)]} + F_{Co} \tanh[\alpha_{Co}(u + u_0)] \right] \times [1 + \eta_{Vi}|u + u_0|] - F_\delta, \quad (3.55)$$

$$F_{RIu\uparrow} = \left[F_{St} \frac{\sinh[\alpha_{St}(u - u_0)] + \kappa_h \sinh[\gamma_{St}[(u - u_0) + \tau_h|u - u_0|]]}{\cosh[\beta_{St}(u - u_0)]} + F_{Co} \tanh[\alpha_{Co}(u - u_0)] \right] \times [1 + \eta_{Vi}|u - u_0|] + F_\delta, \quad (3.56)$$

这里 $F_{RIu\uparrow}$ 、 $F_{RIu\downarrow}$ 、 $F_{RIu\uparrow}$ 分别为 u 在初始正向($u_{cv} \geq u \geq 0$)、迟滞正向与迟滞逆向($u_{cv} \geq u \geq -u_{cv}$)上的摩擦力; u_0 、 κ_h 、 τ_h 为摩擦迟滞待定常数, $2|u_0|$ 为 $F_{RIu\uparrow}$ 与 $F_{RIu\downarrow}$ 二曲线在 u 轴交点间的距离,一般取 $|\kappa_h| \leq 1$ 、 $|\tau_h| \leq 1$; u_{cv} 为 u 的计算截止值,一般取 $u_{cv} > |u_0|$; γ_{St} 为迟滞 Stribeck 效应系数,一般取 $\beta_{St} > 2\gamma_{St} > 0$; F_δ 为摩擦力迟滞偏移量,其为

$$F_\delta = 0.5 \left[\left[F_{St} \frac{\sinh[\alpha_{St}(u_{cv} + u_0)] + \kappa_h \sinh[\gamma_{St}[(u_{cv} + u_0) - \tau_h|u_{cv} + u_0|]]}{\cosh[\beta_{St}(u_{cv} + u_0)]} + F_{Co} \tanh[\alpha_{Co}(u_{cv} + u_0)] \right] \times [1 + \eta_{Vi}|u_{cv} + u_0|] - \left[F_{St} \frac{\sinh[\alpha_{St}(u_{cv} - u_0)] + \kappa_h \sinh[\gamma_{St}[(u_{cv} - u_0) + \tau_h|u_{cv} - u_0|]]}{\cosh[\beta_{St}(u_{cv} - u_0)]} + F_{Co} \tanh[\alpha_{Co}(u_{cv} - u_0)] \right] \times [1 + \eta_{Vi}|u_{cv} - u_0|] \right]. \quad (3.57)$$

当 $\kappa_h = 0$ 且 $u_0 = 0$ 时,由方程(3.51)~(3.57)式得

$$F_\delta = 0,$$

$$F_{RIu\uparrow} = F_{RIu\uparrow}, \quad u_{cv} \geq u \geq 0$$

$$F_{RIu\downarrow} = F_{RIu\uparrow}, \quad u_{cv} \geq u \geq -u_{cv}$$

即此时摩擦迟滞方程(3.55)、(3.56)二式退化为正向、逆向同路的方程(3.49)形式。

当 $\kappa_h \geq 0$ 、 $u_0 \geq 0$ 、 $\tau_h = 1$ 时,趋势性方程(3.55)、(3.56)二式描述的典型摩擦迟滞曲线形态如图 3-17 所示。

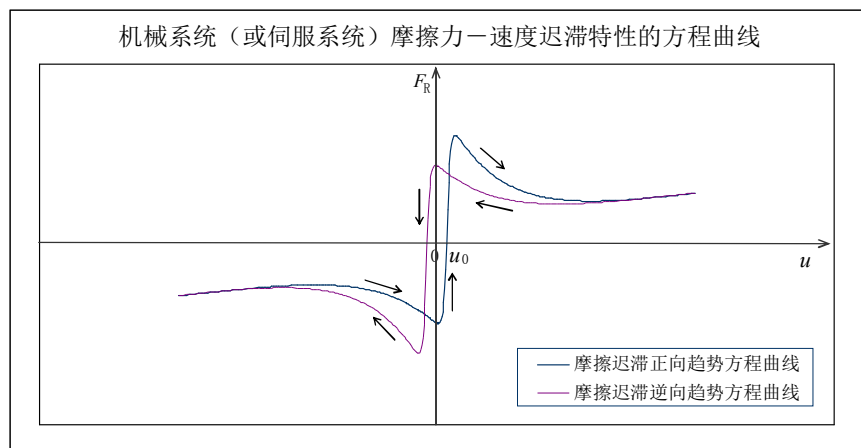


图 3-17 机械系统(或伺服系统)摩擦力—速度迟滞环的趋势方程曲线

Fig. 3-17 Curve figure of tendency equation of the friction-speed hysteresis loop characteristics in mechanical system or servo system

当 $\kappa_h > 0$ 、 $u_0 \geq 0$ 、 $\tau_h = 0$ 时，二方程描述的摩擦迟滞曲线形态如图 3-18 所示。

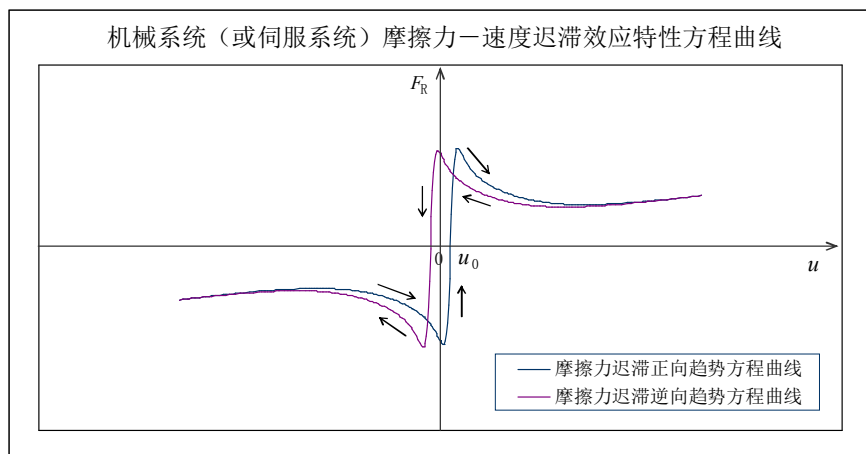


图 3-18 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度迟滞环的趋势方程曲线

Fig. 3-18 Curve figure of tendency equation of the friction-speed hysteresis loop characteristics in mechanical system or servo system

当 $\kappa_h = 0$ 、 $u_0 \geq 0$ 时，二方程描述的摩擦迟滞曲线形态如图 3-19 所示；其在曲线形态特征上为图 3-17 所示曲线形态的特例。

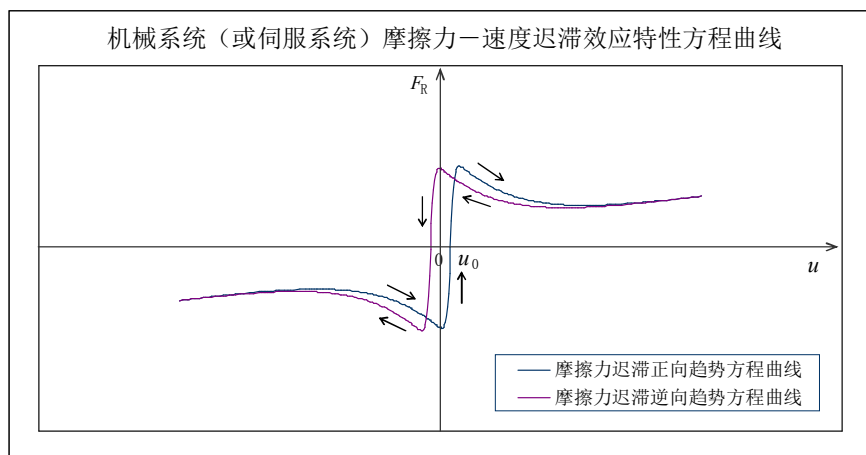


图 3-19 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度迟滞环的趋势方程曲线

Fig. 3-19 Curve figure of tendency equation of the friction-speed hysteresis loop characteristics in mechanical system or servo system

当 $-1 < \kappa_h < 0$ 、 $u_0 \geq 0$ 、 $\tau_h = 0$ 时，二方程描述的摩擦迟滞曲线形态如图 3-20 所示。

图 3-18、图 3-19、图 3-20 所示曲线在形态特征上相似。

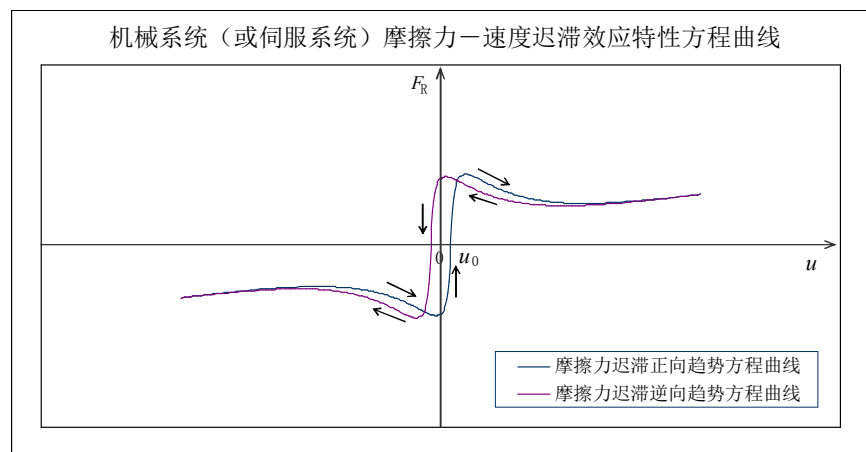


图 3-20 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度迟滞环的趋势方程曲线

Fig. 3-20 Curve figure of tendency equation of the friction-speed hysteresis loop characteristics in mechanical system or servo system

当 $\kappa_h \geq 0$ 、 $u_0 \leq 0$ 时，方程（3.55）、（3.56）二式可构建预言并描述摩擦力—速度关系的反常摩擦迟滞效应（反向迟滞）、正常摩擦迟滞与反常摩擦迟滞相融合的复合迟滞等特征。

当 $\kappa_h \geq 0$ 、 $u_0 \leq 0$ 、 $\tau_h = -1$ 时，二方程描述的反常迟滞效应曲线形态如图 3-21 所示。

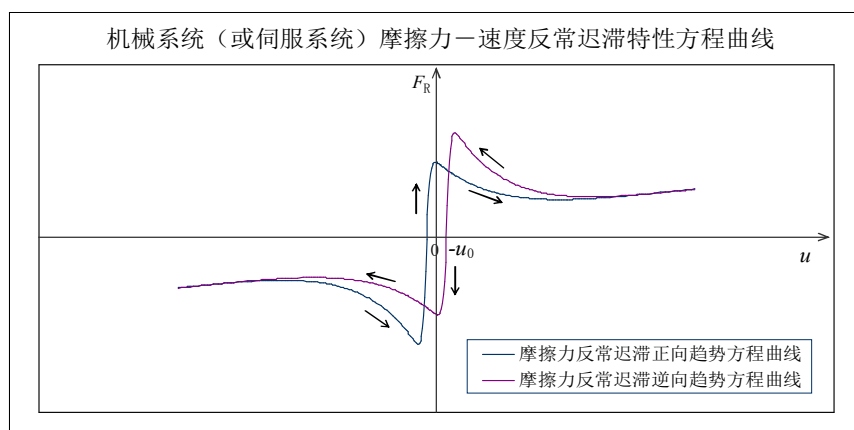


图 3-21 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度反常迟滞效应趋势方程曲线

Fig. 3-21 Curve figure of tendency equation of the friction-speed anomalous hysteresis effect (inverted hysteresis) characteristics in mechanical system or servo system

当 $-0.5 < \kappa_h < 0$ 、 $u_0 \leq 0$ 、 $\tau_h = 1$ 时，二方程描述的反常迟滞效应曲线形态如图 3-22 所示；其与图 3-21 所示曲线形态相似。

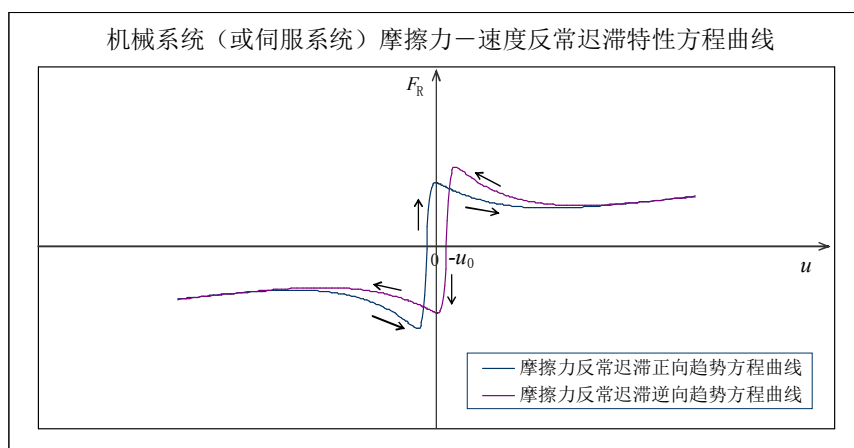


图 3-22 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度反常迟滞趋势方程曲线

Fig. 3-22 Curve figure of tendency equation of the friction-speed anomalous hysteresis effect (inverted hysteresis) characteristics in mechanical system or servo system

当 $\kappa_h > 0$ 、 $u_0 \leq 0$ 、 $\tau_h = 0$ 时，二方程描述的反常迟滞效应曲线形态如图 3-23 所示。

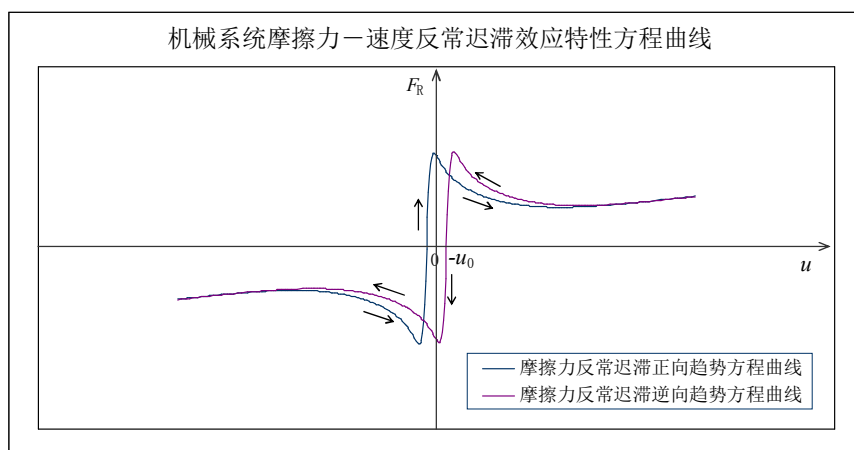


图 3-23 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度反常迟滞环效应特性方程曲线
Fig. 3-23 Curve figure of tendency equation of the friction-speed anomalous hysteresis loop effect characteristics in mechanical system or servo system

当 $\kappa_h = 0$ 、 $u_0 \leq 0$ 时，二方程描述的反常摩擦迟滞曲线形态如图 3-24 所示；其为图 3-21 所示曲线形态的特例。

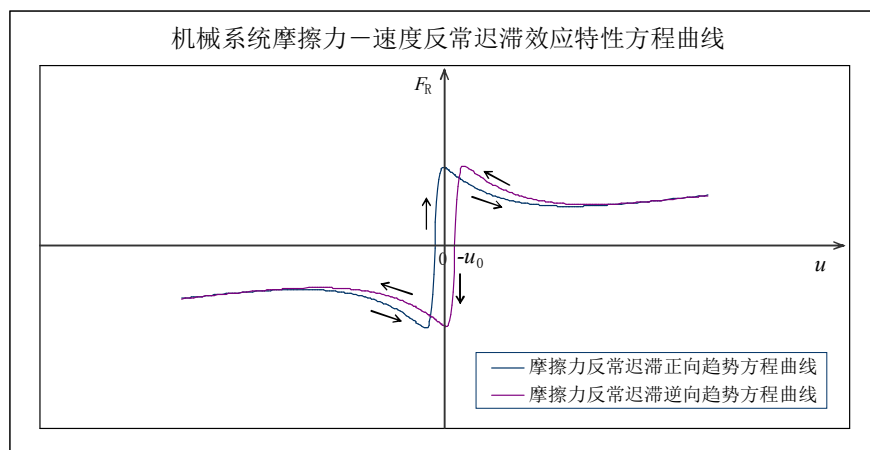


图 3-24 机械系统（或伺服系统）摩擦力-速度反常迟滞环效应特性方程曲线
Fig. 3-24 Curve figure of tendency equation of the friction-speed anomalous hysteresis loop effect characteristics in mechanical system or servo system

当 $-1 < \kappa_h < 0$ 、 $u_0 \leq 0$ 、 $\tau_h = 0$ 时，二方程描述的反常迟滞效应曲线形态如图 3-25 所示。图 3-23、图 3-24、图 3-25 所示曲线在形态特征上相似。

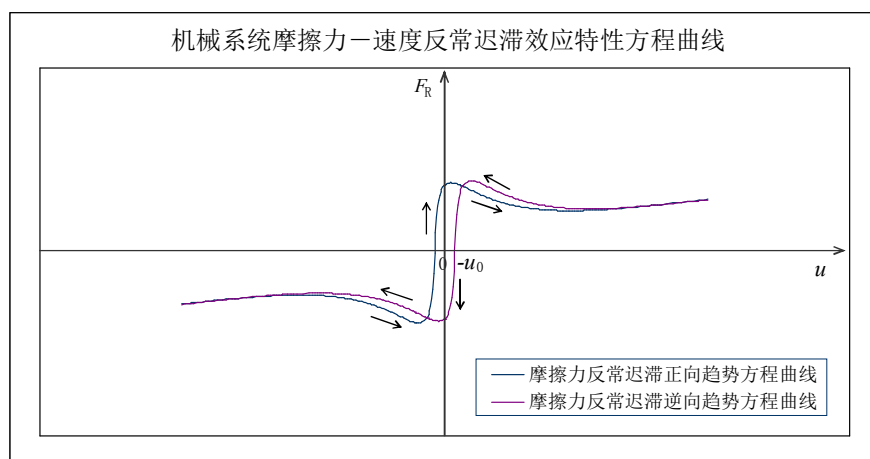


图 3-25 机械系统（或伺服系统）摩擦力-速度反常迟滞环效应特性方程曲线
Fig. 3-25 Curve figure of tendency equation of the friction-speed anomalous hysteresis loop effect characteristics in mechanical system or servo system

当 $1 \geq \kappa_h > 0.50$ 、 $u_0 \geq 0$ 、 $\tau_h = -1$ 时，二方程所描述曲线形态具有正常迟滞与反常迟滞相复合的特征，此复合摩擦迟滞曲线形态如图 3-26 所示。

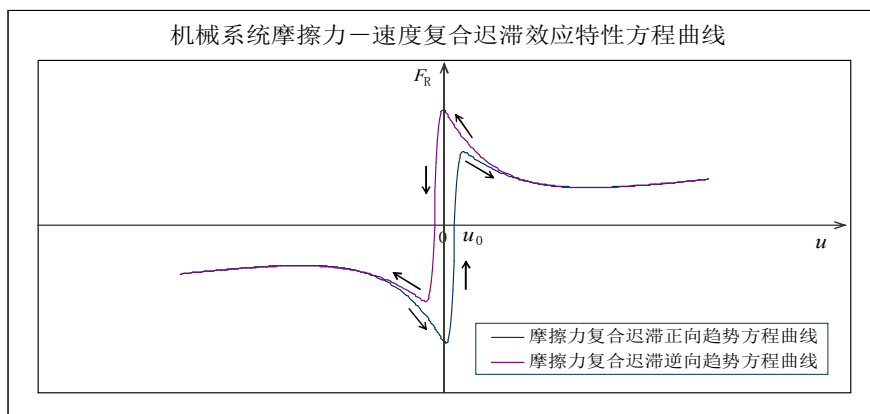


图 3-26 机械系统（或伺服系统）摩擦力-速度复合迟滞效应特性方程曲线 ($u_0 \geq 0$)
Fig. 3-26 Curve figure of tendency equation of the friction-speed composed hysteresis effect characteristics in mechanical system or servo system (when $u_0 \geq 0$)

当 $1 \geq \kappa_h > 0.50$ 、 $u_0 \leq 0$ 、 $\tau_h = 1$ 时，二方程描述的复合摩擦迟滞曲线形态如图 3-27 所示。

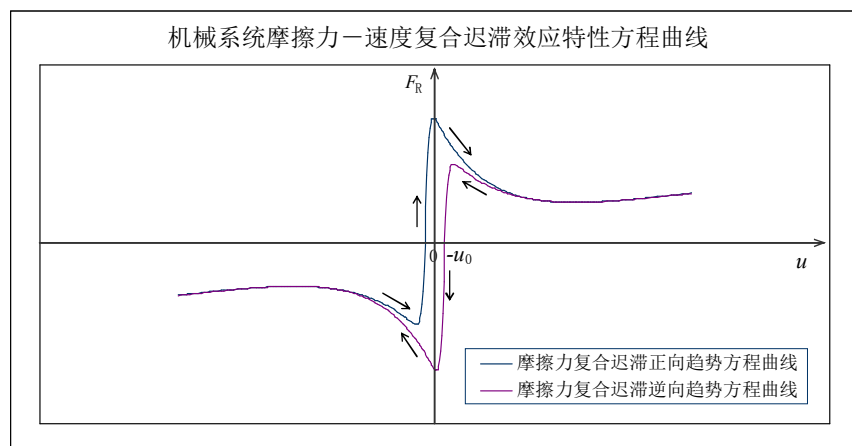


图 3-27 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度复合迟滞效应特性方程曲线

Fig. 3-27 Curve figure of tendency equation of the friction-speed composed hysteresis effect characteristics in mechanical system or servo system

当 $0.5 \geq \kappa_h > 0$ 、 $u_0 \leq 0$ 、 $\tau_h = 1$ 时，二方程所描述的反常摩擦迟滞曲线局部近似同路特征形态如图 3-28 所示。

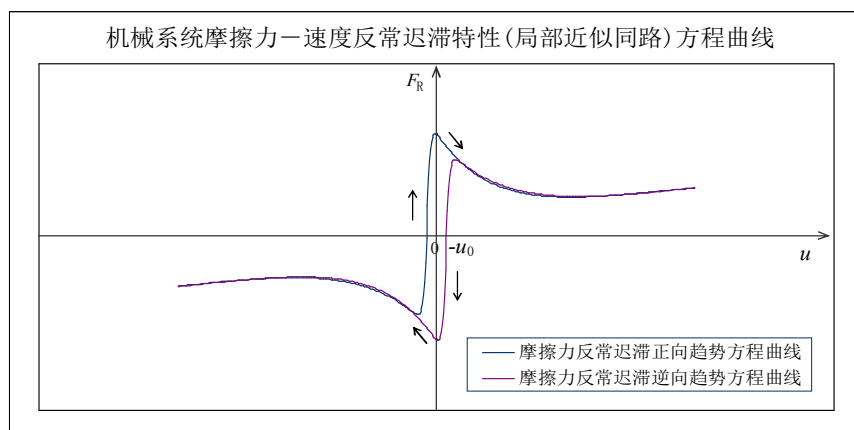


图 3-28 机械系统摩擦力—速度反常迟滞环效应特性（局部近似同路）方程曲线

Fig. 3-28 Curve figure of tendency equation of the friction-speed anomalous hysteresis loop effect characteristics (partial paths to approximate coincide) in mechanical system or servo system

特别地，当 $\kappa_h \geq 0$ 、 $u_0 = 0$ 、 $\tau_h = 1$ 时，二方程所描述的摩擦迟滞曲线形态如图 3-29 所示；此时图 3-27 及图 3-28 曲线与图 3-17 曲线皆转化为图 3-29 所示的曲线形态特征。

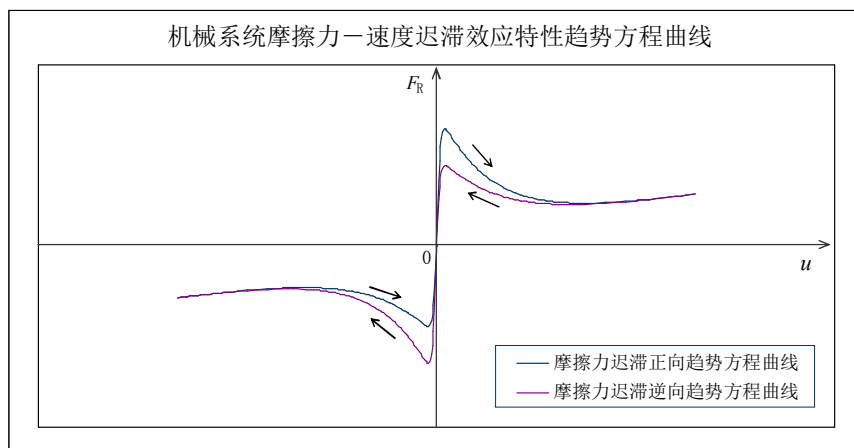


图 3-29 机械系统（或伺服系统）摩擦力—速度迟滞环效应特性方程曲线 ($u_0 = 0$)

Fig. 3-29 Curve figure of tendency equation of the friction-speed hysteresis loop effect characteristics in mechanical system or servo system (when $u_0 = 0$)

作为对机械系统或伺服系统在较高速时摩擦力 F_R —速度 u 特性曲线的唯象探讨,同时兼顾低速时的曲线形态,参照方程 (1.125) 式或方程 (3.49)、(3.51) 二式,可初步给出摩擦力 F_R —速度 u 关系曲线的极限(或饱和)特征的非线性趋势方程形式为

$$F_R = F_{St} \frac{\sinh(\alpha_{St}u)}{\cosh(\beta_{St}u)} + \left[F_{Co} + F_{GN} \frac{\exp[\alpha_{GN}(|u| - u_{N0})] - \exp[-\gamma_{GN}(|u| - u_{N0})]}{2 \cosh[\beta_{GN}(|u| - u_{N0})]} \right] \tanh[\alpha_{sgn}u], \quad (3.58)$$

这里 F_{St} 、 α_{St} 、 β_{St} 仍为与 Stribeck 效应相关的待定系数; F_{Co} 为与 Coulomb 摩擦阶段特征相关的待定系数; F_{GN} 、 α_{GN} 、 β_{GN} 、 γ_{GN} 、 u_{N0} 为与极限特征摩擦效应相关的待定系数,同时兼顾黏性摩擦阶段的曲线特性; α_{sgn} 为具有符号函数特征的待定系数;因仍有 $F_R(u=0)=0$, 故方程主要趋势描述速度 $u \neq 0$ 区域。

为直观地讨论趋势描述方程 (3.58) 式的曲线形态,下面给出其一参考的具体方程形式

$$F_R = 1.13 \frac{\sinh(0.8u)}{\cosh(1.2u)} + \left[1.10 + 1.45 \frac{\exp[\alpha_{GN}(|u| - 20)] - \exp[-0.014(|u| - 20)]}{2 \cosh[0.042(|u| - 20)]} \right] \tanh[2.86u]; \quad (3.59)$$

式中 α_{GN} 分别取值为 0.044、0.042、0.040,三个取值所对应的方程曲线形态如图 3-30 所示;曲线进入相对平缓阶段后,亦即开始酝酿下一阶段的快速(乃至阶跃)演化过程。

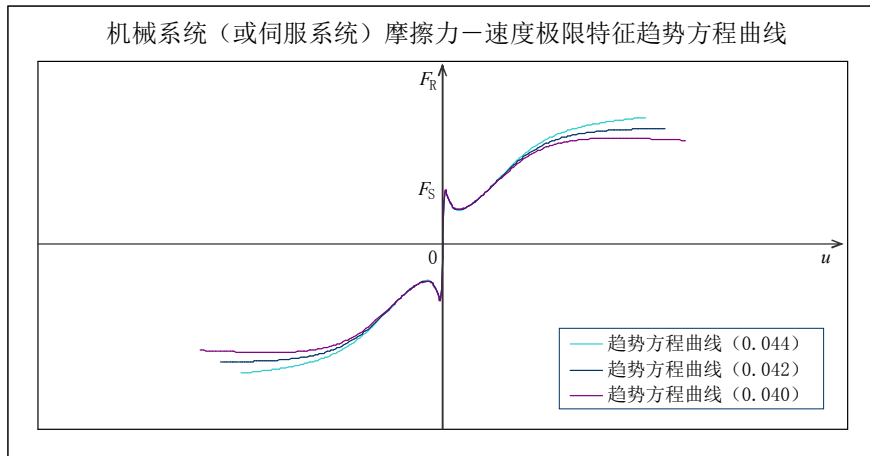


图 3-30 机械系统(或伺服系统)摩擦力—速度极限特征趋势方程曲线

Fig. 3-30 Curve figure of tendency equations of the friction-speed limit characteristics in mechanical system or servo system

在黏性摩擦及其以后的速度区域,方程 (3.49) 式趋势描述了摩擦力的理想线性特征,方程 (3.51) 式趋势描述了摩擦力的部分非线性特征,方程 (3.58) 式则趋势描述了摩擦力的近似极限特征,计 3 个方程形式 6 种曲线形态;诸趋势描述方程形式相关,互为补充。

上述讨论给出的摩擦力—速度趋势描述方程 (3.49)、(3.51) 式,摩擦迟滞方程、反常摩擦迟滞效应方程及复合摩擦迟滞效应方程 (3.54) ~ (3.56) 式,极限特征的非线性摩擦力方程 (3.58) 式,皆属于并行分析方向唯象趋势描述性质的试错探讨形式,进一步研究还需在机理层面阐释摩擦力随滑动速度变化的演化规律,建立摩擦力与相关物理学常数或力学常数的直接联系,减少待定系数,将有关摩擦力方程与机械系统或伺服系统的动力学微分方程相融合,为机械系统或伺服系统摩擦学的解析理论完善及工程实践应用提供并行参考。

3.6 Newton 冷却定律公式的扩展方程形式

作为对 Newton 冷却定律公式的简略讨论,考虑系统冷却过程温度从较高的值 T_H 向较低的值 T_L 变化,参照方程 (1.1) 式,可在唯象层面初步建立系统冷却即时温度差 $(T - T_L)$ —冷却时间 t 之间关系的扩展性趋势方程为

$$\varpi_{C1} \frac{d(T - T_L)}{dt} + \varpi_{C2} \frac{d^2(T - T_L)}{dt^2} + \xi_{C1}(T - T_L) + \xi_{C2}(T - T_L)^2 + \xi_{C3}(T - T_L)^3 = \psi_{C0}, \quad (3.60)$$

这里 ϖ_{C1} 、 ϖ_{C2} 、 ξ_{C1} 、 ξ_{C2} 、 ξ_{C3} 皆为待定系数, $T - T_L$ 为即时温度差, ψ_{C0} 为一与 T_L 相关的微小波动函数。

从方程(3.60)式的形式上分析,若取 ψ_{c0} 为常量,当 $T = T_L$ 为常量时,则可解得 $\psi_{c0} = 0$ 。

在趋势层面,下面讨论取常量 $\psi_{c0} = 0$ 。

在方程(3.60)式中,因 T_L 为常量,有 $d(T - T_L) = dT$;当

$$\left| \varpi_{c1} \frac{dT}{dt} \right| \gg \left| \varpi_{c2} \frac{d^2 T}{dt^2} \right|, \quad |\xi_{c1}(T - T_L)| \gg |\xi_{c2}(T - T_L)^2 + \xi_{c3}(T - T_L)^3|$$

时,有简洁方程

$$\frac{dT}{dt} = -\varpi_{c1}^{-1} \xi_{c1} (T - T_L); \quad (3.61)$$

亦即 Newton 冷却定律公式形式

$$\frac{\delta Q_s}{dt} = -C_s \varpi_{c1}^{-1} \xi_{c1} (T - T_L); \quad (3.62)$$

式中 C_s 为系统的热容, δQ_s 为系统散失热量, $\delta Q_s = C_s dT$;即 Newton 冷却定律公式(3.62)

式为方程(3.60)式当温度差 $[T - T_L]$ 较小时的线性形式。

一般简单直接地,方程(3.60)式当 $\varpi_{c2} = 0$ 、 $\xi_{c3} = 0$ 时,有 Newton 冷却定律公式的趋势性扩展方程形式为

$$\varpi_{c1} \frac{dT}{dt} + \xi_{c1}(T - T_L) + \xi_{c2}(T - T_L)^2 = 0; \quad (3.63)$$

或系统散失热量形式

$$\frac{\delta Q_s}{dt} + C_s \varpi_{c1}^{-1} \xi_{c1} (T - T_L) + C_s \varpi_{c1}^{-1} \xi_{c2} (T - T_L)^2 = 0. \quad (3.64)$$

方程(3.63)式有二具体形式

$$\frac{dT}{dt} + \xi_{EC2}(T - T_L - T_{c0})^2 + \tau_{c1} = 0, \quad \xi_{c2} \neq 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{dT}{dt} + \xi_{EC1}(T - T_L) = 0, \quad \xi_{c2} = 0 \quad (3.66)$$

在方程(3.65)式中 $\xi_{EC2} = \varpi_{c1}^{-1} \xi_{c2}$, $T_{c0} = -0.5 \xi_{c1} \xi_{c2}^{-1}$, $\tau_{c1} = -0.25 \varpi_{c1}^{-1} \xi_{c1}^2 \xi_{c2}^{-1}$;在方程(3.66)

式中 $\xi_{EC1} = \varpi_{c1}^{-1} \xi_{c1}$ 。

方程(3.65)式的二个衰减解分别为

$$T = T_L + T_{c0} + A_c \tanh[\alpha_c(t - t_{c0})], \alpha_c = 0.5 \varpi_{c1}^{-1} \xi_{c1} > 0, A_c = 0.5 \xi_{c1} \xi_{c2}^{-1} < 0, \xi_{c1} \neq 0 \quad (3.67)$$

$$T = T_L + \xi_{EC2}^{-1} [t + t_{c1}]^{-1}, \tau_{c1} = 0 \text{ or } \xi_{c1} = 0 \quad (3.68)$$

式中 t_{c0} 、 t_{c1} 皆为时间待定常数

方程(3.66)式的一个衰减解为

$$T = T_L + T_{c1} \exp[-\xi_{EC1}(t - t_{s0})], \xi_{EC1} > 0 \quad (3.69)$$

式中 T_{c1} 为待定常量; t_{s0} 为开始时间, $t \geq t_{s0}$ 。

在解(3.67)式中,取开始时间为 t_{s0} ,当 $\exp[-\alpha_c(t_{s0} - t_{c0})] \gg 1$ 时,则有

$$T_L + T_{c0} + A_c \tanh[\alpha_c(t_{s0} - t_{c0})] = T_L + T_{c0} - A_c \approx T_H, \quad t = t_{s0}$$

$$T_L + T_{c0} + A_c \approx T_L, \quad t \rightarrow +\infty$$

即有常量 $A_c = 0.5 \xi_{c1} \xi_{c2}^{-1} \approx -0.5(T_H - T_L)$, $T_{c0} = -0.5 \xi_{c1} \xi_{c2}^{-1} \approx 0.5(T_H - T_L)$;解(3.67)式成为

$$T \approx 0.5(T_H + T_L) - 0.5(T_H - T_L) \tanh[\alpha_c(t - t_{c0})]; \quad (3.70)$$

式中常数 t_{c0} 与常量 T_H 及 T_L 的关系为当 $t = t_{c0}$ 时, $T \approx 0.5(T_H + T_L)$ 。

在解(3.68)式中,有

$$T_L + \xi_{EC2}^{-1} [t_{s0} + t_{c1}]^{-1} = T_H, \quad t = t_{s0}$$

得常量 $t_{C1} = [\xi_{EC2}(T_H - T_L)]^{-1} - t_{S0}$; 解 (3.68) 式成为

$$T = T_L + \xi_{EC2}^{-1}[t - t_{S0} + [\xi_{EC2}(T_H - T_L)]^{-1}]^{-1}. \quad (3.71)$$

在解 (3.69) 式中, 有

$$T_L + T_{C1} = T_H, \quad t = t_{S0}$$

解得常量 $T_{C1} = T_H - T_L$; 解 (3.69) 式成为

$$T \approx T_L + [T_H - T_L] \exp[-\xi_{EC1}(t - t_{S0})], \quad \xi_{EC1} > 0, \quad t \geq t_{S0}. \quad (3.72)$$

解 (3.72) 式亦为方程 (3.61) 式解的具体形式。

其中, 扩展方程 (3.63) 式及其解 (3.70) 式较经典 Newton 冷却定律形式 (3.61) 式及其解 (3.72) 式, 主要是兼顾了二次项 $(T - T_L)^2$ 的变化。

一般地, 对于系统从一种状态 y_H 到另一种状态 y_L 的演化, 可根据方程 (3.70) 式的扩展形式或方程 (3.60) 式的近似等效解析解形式 (1.19) 式予以趋势性描述

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x - x_{C0})] - \exp[-\alpha_2(x - x_{C0})]}{2 \cosh[\alpha_1(x - x_{C0})]}, \quad (3.73)$$

这里 x_{C0} 、 y_0 、 A 、 α_1 、 α_2 皆为待定常量; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $y(x = x_{C0}) = y_0$ 。

由方程 (3.73) 式得

$$y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x_{S0} - x_{C0})] - \exp[-\alpha_2(x_{S0} - x_{C0})]}{2 \cosh[\alpha_1(x_{S0} - x_{C0})]} = y_H, \quad x = x_{S0}$$

$$y_0 + A = y_L, \quad x \rightarrow +\infty$$

解得常量间的部分关系

$$A = [y_H - y_L] \left[\frac{\exp[\alpha_1(x_{S0} - x_{C0})] - \exp[-\alpha_2(x_{S0} - x_{C0})]}{2 \cosh[\alpha_1(x_{S0} - x_{C0})]} - 1 \right]^{-1}; \quad (3.74)$$

$$y_0 = y_L - A. \quad (3.75)$$

方程 (3.73) 式具有诸多演化过程, 其中 3 个具有相同常数 x_{C0} 的演化过程趋势性曲线如图 3-31 所示。

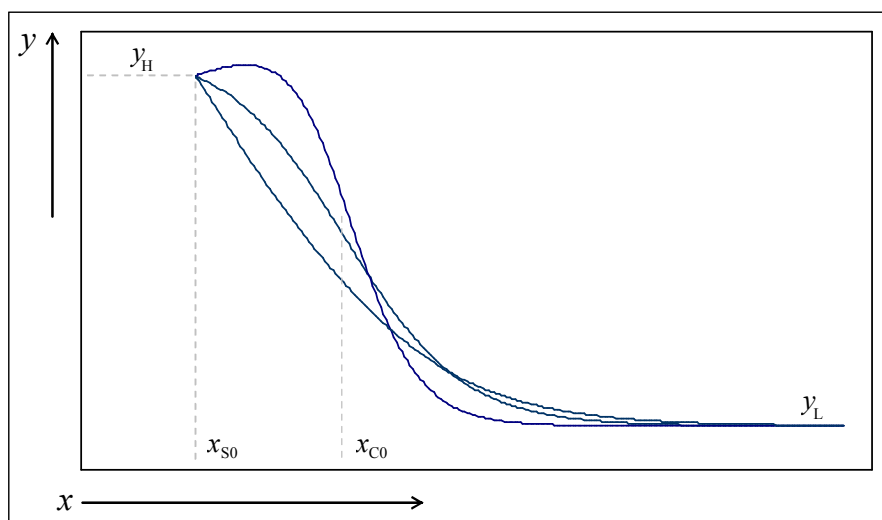


图 3-31 类如 Newton 冷却定律的状态演化过程扩展方程曲线图

Fig. 3-31 Curve figure of expanded equation of the state evolutionary process such as the Newton's law of cooling

上述关于系统从一种状态 y_H 到另一种状态 y_L 间的演化过程曲线描述, 对于进一步探索包括极端情况下热力学第二定律的反常情况或逆向传热途径及 Maxwell 妖的机理等方面内容, 尤其是在物质结构特征方向, 对于具有整体性的 Maxwell 妖研究、或 Maxwell 妖与系统合一情况下的反常或逆向传热研究, 具有深刻的前导意义。

热力学退化与自组织进化在更高层面及更细微环节中是相互包含的演化过程。进化隐含着退化的潜势, 退化孕育着进化的萌芽; 一层面上的退化或进化, 可成为另一层面上进化或退化的必要部分。理论思想升维, 实践操作降维, 理实联袂互动虚实结合, 如此以从容进退及保全; 诸如, 军事家需洞彻政治趋势, 科学家当通达转识成智, 宗教家应证解生灭灭尽。

3.7 高聚物熔体流动曲线的趋势性方程及其与材料蠕变曲线的相似性(初步展望 Navier-Stokes 方程的一个参考求解方向)

作为对流体尤其是高聚物熔体的流动曲线形态及 Newton 流体方程、Bingham 流变模型方程、Herschel-Bulkley 流变模型方程等资料^[15, 16]的深入探讨研究, 参照方程 (1.1) 式, 在唯象及趋势层面可初步建立高聚物熔体流动曲线剪切应力 σ_F 与剪切速率 φ_t 关系方程为

$$\varpi_{F1} \frac{d\sigma_F}{d\varphi_t} + \varpi_{F2} \frac{d^2\sigma_F}{d\varphi_t^2} + \xi_{FIE} + \xi_{F1}\sigma_F + \xi_{F2}\sigma_F^2 + \xi_{F3}\sigma_F^3 = \psi_{FEE}, \quad (3.76)$$

式中 ϖ_{F1} 、 ϖ_{F2} 、 ξ_{F1} 、 ξ_{F2} 、 ξ_{F3} 皆为系函数; ξ_{FIE} 为内激励函数, ψ_{FEE} 为外激励函数。

下面讨论 ϖ_{F1} 、 ϖ_{F2} 、 ξ_{F1} 、 ξ_{F2} 、 ξ_{F3} 、 $\psi_{FEE} - \xi_{FIE}$ 皆为常数情况下的方程性质。

最为简单地, 方程 (3.76) 式当 $\varpi_{F1} \neq 0$ 、 $\varpi_{F2} = 0$ 、 $\xi_{F3} = 0$ 时, 有剪切应力方程

$$\varpi_{F1} \frac{d\sigma_F}{d\varphi_t} + \xi_{F1}\sigma_F + \xi_{F2}\sigma_F^2 = \psi_{FEE} - \xi_{FIE}. \quad (3.77)$$

方程 (3.77) 式有二种形式

$$\frac{d\sigma_F}{d\varphi_t} + \xi_{EF2}(\sigma_F - \sigma_{F0})^2 + \tau_{E1} = 0, \quad \xi_{F2} \neq 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{d\sigma_F}{d\varphi_t} + \xi_{EF1}\sigma_F + \tau_{E2} = 0, \quad \xi_{F2} = 0 \quad (3.79)$$

在 (3.78) 式中 $\xi_{EF2} = \varpi_{F1}^{-1}\xi_{F2}$, $\sigma_{F0} = -0.5\xi_{F1}\xi_{F2}^{-1}$, $\tau_{E1} = -\varpi_{F1}^{-1}[\psi_{FEE} - \xi_{FIE}] - 0.25\varpi_{F1}^{-1}\xi_{F1}^2\xi_{F2}^{-1}$;

在 (3.79) 式中有 $\xi_{EF1} = \varpi_{F1}^{-1}\xi_{F1}$, $\tau_{E2} = -\varpi_{F1}^{-1}[\psi_{FEE} - \xi_{FIE}]$ 。

方程 (3.78)、(3.79) 二式的解分别为

$$\sigma_F = \begin{cases} \sigma_{F0} + A_F \tan[\alpha_F(\varphi_t - \varphi_{t0})], & \xi_{EF2}\tau_{E1} > 0, \quad \alpha_F = \sqrt{\xi_{EF2}\tau_{E1}}, \quad A_F = -\alpha_F\xi_{EF2}^{-1} \\ \sigma_{F0} + A_F \tanh[\alpha_F(\varphi_t - \varphi_{t0})], & \xi_{EF2}\tau_{E1} < 0, \quad \alpha_F = \sqrt{-\xi_{EF2}\tau_{E1}}, \quad A_F = \alpha_F\xi_{EF2}^{-1} \\ \sigma_{FC} + \xi_{EF2}^{-1}[\varphi_t + \tau_{EC}]^{-1}, & \tau_{E1} = 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

$$\sigma_F = \begin{cases} [\sigma_{F\varphi_t=0} + \tau_{E2}\xi_{EF1}^{-1}] \exp(-\xi_{EF1}\varphi_t) - \tau_{E2}\xi_{EF1}^{-1}, & \tau_{E2}\xi_{EF1}^{-1} < 0, \quad \sigma_F + \xi_{EF1}^{-1}\tau_{E2} > 0 \\ -[\sigma_{F\varphi_t=0} + \tau_{E2}\xi_{EF1}^{-1}] \exp(-\xi_{EF1}\varphi_t) - \tau_{E2}\xi_{EF1}^{-1}, & \tau_{E2}\xi_{EF1}^{-1} < 0, \quad \sigma_F + \xi_{EF1}^{-1}\tau_{E2} < 0 \\ \sigma_{F\varphi_t=0} - \tau_{E2}\varphi_t, & \xi_{EF1} = 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

解 (3.80) 式中 φ_{t0} 、 σ_{FC} 、 τ_{EC} 皆为待定常量, 对于其中的三角函数正切形式及双曲正切函数皆有 $\sigma_F(\varphi_t = \varphi_{t0}) = \sigma_{F0}$; 解 (3.81) 中 $\sigma_{F\varphi_t=0} + \tau_{E2}\xi_{EF1}^{-1} > 0$, 对于其中的第二个解当 $\xi_{EF1} > 0$ 时如取 $\sigma_{F\varphi_t=0} \geq 0$, 则有 $-\tau_{E2}\xi_{EF1}^{-1} \geq 0.5\sigma_{F\varphi_t=0}$ 。

由解 (3.81) 式中的线性函数得 Bingham 流变模型方程形式

$$\sigma_F = \sigma_{L\varphi_t=0} - \tau_{E2}\varphi_t = \sigma_Y + \eta_F\varphi_t, \quad \sigma_F \geq \sigma_Y \quad (3.82)$$

进一步当 $\sigma_{F\varphi_t=0} = 0$ 时, 即简化为 Newton 流体的剪切应力方程形式

$$\sigma_F = -\tau_{E2}\varphi_t = \eta_F\varphi_t; \quad (3.83)$$

这里 σ_Y 为屈服应力, $\sigma_Y = \sigma_{F\varphi_t=0}$, 当 $\sigma_F < \sigma_Y$ 时 $\varphi_t = 0$; η_F 为黏度, $\eta_F = -\tau_{E2}$ 。

解 (3.80) 式中的三角函数正切方程形式、(3.81) 式中的指数函数形式 (当 $\xi_{EF1} < 0$ 时), 都可趋势性地描述高聚物熔体在膨胀区的曲线形态; 其中解 (3.80) 式中的双曲正切函数形式可初步并行于 Herschel-Bulkley 流变模型剪切应力 σ_C 的本构方程形式

$$\sigma_C = \sigma_Y + \eta_C\varphi_t^\nu, \quad \sigma_C \geq \sigma_Y$$

这里 η_C 为表观黏度, ν 为偏离 Newton 流体的指数; 当 $\sigma_C < \sigma_Y$ 时 $\varphi_t = 0$ 。

对于解 (3.80) 式, 可直接应用其中的双曲正切函数形式

$$\sigma_F = \sigma_{F0} + A_F \tanh[\alpha_F(\varphi_t - \varphi_{t0})], \quad (3.84)$$

对高聚物熔体流动曲线剪切应力与剪切速率关系进行趋势性描述。

一般地, 在唯象层面乃至偏重于数据趋势探讨方向, 还可由方程 (3.84) 式的二个扩展形式

$$\sigma_F = \sigma_{F0} + A_F \frac{\exp[\alpha_{F1}(\varphi_t - \varphi_{t0})] - \exp[-\alpha_{F2}(\varphi_t - \varphi_{t0})]}{2 \cosh[\alpha_{F3}(\varphi_t - \varphi_{t0})]}, \quad (3.85)$$

$$\sigma_F = \left[\sigma_{F0} + A_F \frac{\exp[\alpha_{F1}(\varphi_t - \varphi_{t0})] - \exp[-\alpha_{F2}(\varphi_t - \varphi_{t0})]}{2 \cosh[\alpha_{F3}(\varphi_t - \varphi_{t0})]} \right] [1 + \mu_F \varphi_t]; \quad (3.86)$$

及极端情况下 (3.84)、(3.85) 二式的坐标置换方程形式

$$\varphi_t = \varphi_{t0} + A_{RF} \tanh[\alpha_{RF}(\sigma_F - \sigma_{F0})], \quad (3.87)$$

$$\varphi_t = \varphi_{t0} + A_{RF} \frac{\exp[\alpha_{RF1}(\sigma_F - \sigma_{F0})] - \exp[-\alpha_{RF2}(\sigma_F - \sigma_{F0})]}{2 \cosh[\alpha_{RF3}(\sigma_F - \sigma_{F0})]}; \quad (3.88)$$

对高聚物熔体流动曲线从第一 Newton 区、假塑性区, 经第二 Newton 区, 至胀流区及湍流相变近于整体性的趋势描述; 上面方程 (3.84)、(3.85) 二式中 A_F 、 α_{F1} 、 α_{F2} 、 α_{F3} 、 μ_F , 及方程 (3.87)、(3.88) 二式中 A_{RF} 、 α_{RF} 、 α_{RF1} 、 α_{RF2} 、 α_{RF3} 皆为待定系数。

在解 (3.80) 式中

$$\sigma_F = \sigma_{FC} + \xi_{EF2}^{-1} [\varphi_t + \tau_{EC}]^{-1}, \quad (3.89)$$

当 $\xi_{EF2} > 0$ 时会呈现熔体随着剪切速率的增加, 剪切应力减小的反常剪切特征。

在趋势上方程 (3.85) 式或方程 (3.88) 式所描述的高聚物熔体流动曲线形态如图 3-32 所示。

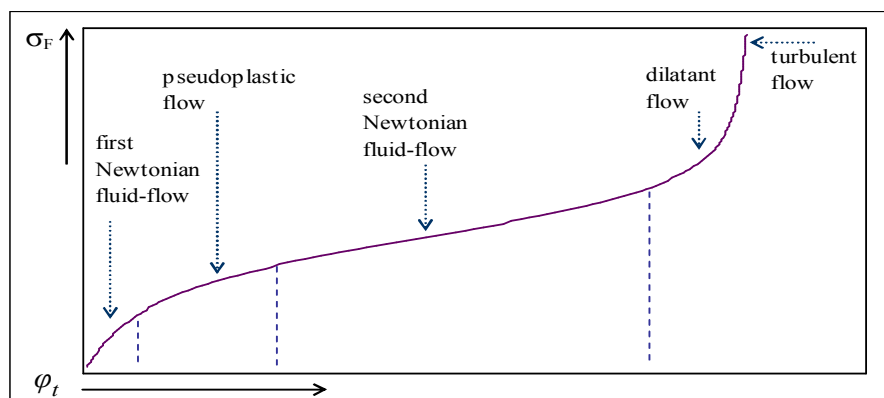


图 3-32 高聚物熔体剪切应力—剪切速率关系趋势性方程曲线图

Fig. 3-32 Curve figure of tendency equation of shear stress-shear rate in the flow curve of the polymer melts

对比材料蠕变过程曲线图 1-3 与高聚物熔体流动曲线图 3-32, 在唯象及趋势层面材料蠕变曲线与高聚物熔体流动曲线二者可由相类似的方程形式描述, 于解析分析途径方面可相互借鉴; 其中, 材料蠕变的第一阶段 (初始蠕变)、第二阶段 (定常蠕变)、第三阶段 (加速蠕变)、断裂阶段, 即分别对应着高聚物熔体流动曲线的第一 Newton 区及假塑性区前部、假塑性区后部及第二 Newton 区、膨胀性区、湍流区。

这其中尤为重要的是, 材料断裂阶段与熔体湍流区相对应, 可在机理解析与方程组构建及求解方面相互比对研究。

将上述材料蠕变过程曲线与熔体流动曲线相对应的性质, 在趋势上延伸至一般材料与流体描述, 特别是材料断裂中的裂纹扩展分形结构与流体湍流中的漩涡嵌套分形结构这二种现象演化, 在多层面机理特征及分形维数 D_F 和测度 $M(D_F)$ 计算表述上具有相通性, 可建立能量 E 的一致性演化方程

$$E = E(M(D_F)). \quad (3.90)$$

依据上述分析可初步展望, 参照偏对称方程 (1.19) 式及由其拓展的广义偏对称方程 (1.27) 式 ~ (1.30) 式、及方程 (1.32) 式、(1.33) 式等形式, 将材料蠕变曲线与流体流动曲线相对应进行相互借鉴研究, 尤其是关于材料断裂和流体湍流在趋势唯象及机理解析层面的相通性探索, 可望得到在湍流演化描述方面并行于诸如 Navier-Stokes 方程等经典表述的解析阐释, 乃至绕到前面给出目前如 Navier-Stokes 方程等表述的多种条件下近似解析解参考形式。

一般现象演化饱和过程方程、电磁理论与材料力学方程、流体力学方程等具有形式上相类似的性质，极限上包括现象演替的极限饱和过程、器件的电磁击穿融结、材料的力学断裂裂纹扩展及流体的湍流漩涡嵌套结构等，相互比照借鉴研究，唯象研究与机理解析互补协调并进，由同一套数学方程表述形式统一趋势性描述刻画，是重要的探索途径。

上述对于 Newton 冷却定律公式扩展形式及流体流动曲线的剪切应力与剪切速率趋势性方程形式等方面内容，仅是从唯象及趋势层面进行的简略试错性探讨，深入研究还需要从机理角度给出解析描述。

刻画质点或粒子分形运动的方程中除一部分主要是粒子之间的作用，近似为确定性的、具有可逆性的动力学项部分外，另一部分主要是粒子与背景介质之间的作用，近似为随机性的、统计性的热力学项部分，其呈现为不可逆性或耗散性；这二部分以多种形式耦合共同构成粒子分形运动方程表述。在非线性刻画的基础上建立新层面的线性方程，而该线性方程亦是更高演化层面非线性表述方程的极限形式或特例。

觉 行 饱和蠕变同体分，断裂湍流共相论；娑婆聚散因果果，幻生幻灭幻中阴。

回 望 少时向往天边路，奈何天边渐垂暮；最是人生感悟处，晨曦淡月花满树。

梦别离 拂晓辞行细嘱，挥手故乡渐无；叹醒再祈梦回，依柳田园小路。

惜 岁 浮生如梦幻，刹那数十年；明日乘风去，随性云水间。

3.8 系统或世界演化的一种简单趋势性方程曲线及向圣九阶

作为对系统或世界成住坏空演化过程局部性质的初步探讨，现再回到简洁普适的非线性动力学方程 (1.1) 式

$$\omega_1 \frac{dy}{dx} + \omega_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi_{IE} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \xi_3 y^3 = \psi_{EE}; \quad (3.91)$$

该方程具有线性解、非线性解，周期解，及其若干复合形式，包括变频振荡解、及增长、衰减、平缓等诸多表述，能够在唯象层面对较为广泛的自然现象演化过程予以趋势性刻画。

简单地，对于系统或世界从一种状态向另一种状态演化的过程，可应用方程 (1.19) 式

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x - x_0)] - \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x - x_0)]}, \quad (3.92)$$

或上式的坐标置换方程形式

$$x = x_{R0} + A_R \frac{\exp[\alpha_{R1}(y - y_{R0})] - \exp[-\alpha_{R2}(y - y_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_{R3}(y - y_{R0})]}, \quad (3.93)$$

予以唯象层面的趋势性刻画；式中 x_{R0} 、 y_{R0} 、 A_R 、 α_R 、 α_{R1} 、 α_{R2} 、 α_{R3} 皆为待定常量， $x(y = y_{R0}) = x_{R0}$ ；一般地，可初步取置换前后方程常数的近似关系 $x_{R0} \approx x_0$ 、 $y_{R0} = y_0$ 。

引入坐标置换方程，可将原来在极限情况下不太容易确定的趋势性分析计算，转化为稳定易解的分析计算；即在唯象趋势性层面，将蠕变过程方程曲线直接置换为饱和过程曲线然后确定具体方程形式。其中对于系统或世界成住坏空（或个体生住异灭）演化过程的一个周期，在略去波动情况下，依据方程 (3.92) 式或 (3.93) 式，乃至方程 (3.92) 式的广义偏对称方程 (1.27) 式~ (1.30) 式、及方程 (1.32) 式、(1.33) 式等形式予以趋势性描述，可得于唯象趋势性层面上一简单调的方程曲线如图 3-33 所示。

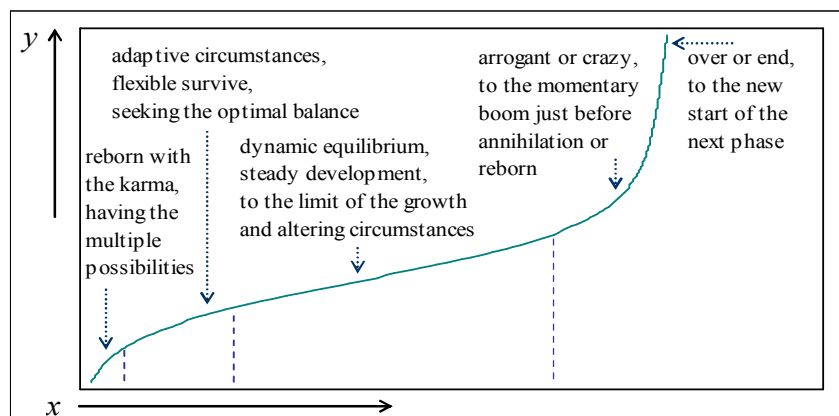


图 3-33 系统或世界演化过程的简洁趋势性方程曲线图

Fig. 3-33 Curve figure of concise tendency equation for evolution process of the system or the world

上述曲线亦具有人对时间流逝的感觉特征，即在少年后感觉时间流逝越来越快；原因之一一是所思虑事件的时间单位逐渐变大，其中在青年之后人生的阶段性目标多以年为单位；当中年之后常常沉浸在对过往斑斓岁月的追忆时，恍然间春夏秋冬。

若将人类发展的每千年时段作为一个单位，则有多少辉煌帝国在刹那间生灭，乃至是几乎都未曾存在过。

上述分析表明，将器件击穿、材料断裂、流体湍流、国家解体或兴衰更迭、世界成住坏空、个体生住异灭等现象演化过程进行系列性比对研究，机理相互借鉴对应促进，普适构造与逻辑解析相结合，趋势性动力学基本方程形式一致，具体细节各具其本征特性；而更为普遍但仍是初阶地，完备及通达超越逻辑语义解析分别的层面，公平及尊严超越世俗凡尘的层面，恒远自在超越长生久视生灭福报的层面，觉悟及圆融超越诸识执著的层面；在过初阶之后，诸相邻层面渐次消融不一不异；此具有深刻而广泛的意义，乃至是超凡向圣、凡圣一如的方向。

向圣九阶，不拘次第；其主线包括但不限于此为：

- A 复变函数阶微积分理论的开放性解析构造及其伴生悖论，几何意义阐释及拓展应用；
- B 关于真空的诸层次背景能量及信息构造与相互间映射关联、凝聚转化及展开模式；
- C 光的诸层结构、电磁解析表述、运动特征、与深层背景及其它粒子谱系间的相互作用和转化机理；
- D 介质临界面及膜结构的物理化学相变特征和信息传递模式；
- E 星体公转及自转与全球物质运动整体耦合描述体系；
- F 系列星系的构造模式、运动趋势、聚散演化及相互间作用规律；
- G 家国兴衰的动态更迭演替因果与诸层多世界循环的成住坏空映射；
- H 生物体生住异灭轮转的宿命及创造与阿赖耶识的染净转化、中阴迁移及遍连多世界模式，无执于本体，不落于断灭；
- I 一如偈（归化地） 依妄证真转染成净，我法执歇尘虚根明，无漏现前不舍有漏方便，智悲互济随示凡圣。

其中第九阶一如偈宜理悟实证；知机随顺智悲圆融，自如造化凡圣假名。

在理论与实践的结合上，原理及定律和伴生悖论一体演进转化，同时与极限相变实验或悟解证行相结合的描述示现途径为第一方法；这也是科学家在目前阶段乃至长远时期转识成智的主旨方向。

在大略上，政治家趋向世界至高支配核心的绝对统治权威与科学家探索自然演化最基本的原理规则及部分宗教家信仰追溯宇宙最高的创造运转主神，三者理体相通。

随着时间流逝、环境变迁而逐渐转化消陨的事物，都是缘生缘谢的过程产品；而以语言逻辑或解析方程表述的思想体系，亦仅是阶段性及过渡性的层面指向；执著即致自缚，放下即趣自在。

平民狭缝讨生路，踽踽零落；权贵通揽拼资源，挥戈高歌；帝王伏案搏历史，天下予何？

世歌 春来秦岭淡姿容，翠柳桃花映紫荆；峪口溪流奔沧海，崖畔古寺浮云顶；
天下英雄如潮涌，江山数世复变更；多少烟雨芳尘梦，一片朦胧长安城。

经行 云岭绵绵天台开，雪峰隐隐层峦外；光影淡晕风细语，一声佛号故人来。

随顺 诸佛幻娑婆，演道示寂灭；了义指归途，吾亦化连接。

要义 娑婆净土，唯证一如；觉者示现，善缘自度。

3.9 仿佛一切的一切及觉行至道基本所现

仿佛一切的一切，都是因缘和合的暂态表征；人因为深迷于我及我所，故而执著其中随波逐流。蓦然回首，年华远逝，怆然不及。隐约间，那些年、那些人、那些事、那些场景，都成过往；那些激昂豪情、那些低迷沉沦、那些纠结无奈、那些随遇安适，皆化记忆；过往辉映前程，记忆照亮人生。

东方旭日喷薄，碧梵云纱纤月；素舟轻泊简栈，朝露含光原野。

山川草木，初春嫩绿，晚秋萧索，如梦如幻；村寨阡陌，城市霓虹，曾走过的路、遇见的人，恍若昨天。

远峰淡淡，平湖潋潋；和风芦荻，细雨田园；小桥竹林，薄雾炊烟。

人生有很多选择；或仕途虚拟，或科研巫覡，或悬壶祝由，或商贾交易，或游吟恣肆，或耕读潜修，皆一乐而已；其若尘埃细末于寰宇，浮沉生灭微不足道。

人身难得，何以达成所愿略窥天地造化演替之机？直面科学研究，或可微弱有成。

选择科学研究，究竟目的是深刻理解自然、重新融回自然，进而在成住坏空的循环往复中悟解人生本相，在适当应对并兼容境遇的同时，锤炼成长为具有自己完整特征的觉悟者，此亦是东方古老智慧的内典精要所在。曾经的年少志远、言过其实，想来惭愧；过往的整装再启、夜以继日，宛若梦里；以为能凭一己之力推进文明进程，却发觉仅是在过程中悄然改变了自己。偶尔回转坐在宗族长辈、早年师友、童年玩伴身边，倾听他们对人生的坚守期冀、沉思理解及朴直洞见，缓缓荡开薄纱，揭示既古老而生动、又质朴而深刻的娑婆本相。平等离相善待随遇的每一个人，由此引发智慧援手连绵延展无尽，并自然温暖累劫以来或同联修证或异行轮转的故旧和新人；这也是离相普度无功用行的殊胜之处。充分尊重前辈的证道成就，尽可能阐释自己的实践证解，走出自己的延伸道路，并适时回向共同觉悟。

科学研究，许多时只是社会结构环节中一份普通职业、谋生途径、生存模式，是生活的光环，是思想的翅膀，是仕途的台阶，亦是人生的枷锁，且通常仅是追风赶潮讨口饭吃的临时工作岗位；或是在适当的场合下声情并茂、酸腐刻薄地复述及评论些前人的研究成果，如同置身于戏幕中随剧情发展说些应景台词；或是殚精竭虑、夜以继日地探究自然奥秘，随后庄重高古、隐显莫测地说些关于自然演化的闲话。在一般的通常层面，仅就其应景机巧而言，东拉西扯潮水朝月，穿凿附会仙人出山，无事生非世女人丁，连篇累牍未明究竟，时效虚招不堪复睹，似是际遇所致且难以完全避免的。在极端方向，当科学成为一种信仰时，伴随着往日所取得的些许阶段性成果，更深重的偏执和狭隘亦可能同时生成了。学派门第高展旌旗，圈子势力兼容并蓄；圣殿肃穆刀光剑影，丛林江湖党同伐异；歌舞未歇异军突起，推陈出新前赴后继。

身处江湖意覆天外。宜深居主流亦明察兼顾其余；工笔严整纤毫毕现，泼墨写意大略超凡；既在主流中奋进同时又不拘泥于此，在进阶过程适机开辟新的主流方向，勇于探索试错，谦勉开放精进，其中知机适度是为切要。偶尔闲散，负手向远，隐约内视，豁然无我。

走进科学，继而再走出科学，然后于新的层面再返回科学，则或能取得整体性里程碑式的卓越研究成果，乃至继往开来、创宗立派、浑然天成；随后即踏上平和谦诚、返璞归真、非常非断的台阶；潜深继承，俯瞰拟新，转识成智，直接跃出同时代一流学者成就其上二个层面。

走过科学台阶，超越逻辑模式，勿使科学成为天牢，自己陷为囚徒。

在人类历史中，诸多人物皆是生灭辗转的匆匆过客，亦是所处时代相应层面风云的参与者及见证者。自然处在无穷层面的相互关联演化过程，人类及其知识体系仅是自然演化的微弱构成部分，是一微小环节的零碎片段或曲折断面，随同演进是基本路线，人类在逻辑解析乃至语言思辨方向难以穷尽自然演化内涵，更难以获得原本就是虚拟的终极规律或基本规律，亦即学术无定论；所谓法无定法，因人而异；论无定论，因境而别。局部阶段性、简略趋势性及诸层原理或定律与其伴生悖论一体演进转化应是人类知识体系的显著特征。

人类业已获得的规律在人类的发展进程中是延伸链条中的构成环节，是通往远方的阶梯，是功能性的工具，是思想传承中的节点，更重要的是获得新规律的参照，参与延展构造规律谱系或真理谱系，进而生形公共知识树，自然化显共享智慧树。其中，第一性虚拟，本体假名；了义方便说，法身非相。

历代智圣，本质上多是偶尔经行娑婆世界的出世隐修者；而诸多祖师级科学家及卓越学者，亦是偶尔经行路过科学台阶歇脚的简素贤哲。累劫的觉悟，多世界的并行；随遇的示现，遥远的旅程。

对于科学艺术及政治宗教，在学者走过相应的学问台阶之后，其即转变为规则筹码及操纵工具；徘徊于学问台阶，以台阶为人生舞台，则学问易成人生桎梏及轮转迷境。

在这个因果递续的纷繁世界，深远微妙的智慧和广大平等的慈悲一直在起着引导与平衡的决定性作用。这是圣者依愿随缘示现觉悟教化或参与教化的世界，同时圣者清静离相无我我所。

人生短促，转瞬即逝；善护根源，敬重师长；通达世事因缘聚散，洞彻生灭自主流迁。

初生时的第一声啼哭，豁然放开了；临终时的最后一滴清泪，就此放下了。长路漫展，似累世的索，遥遥连着身影；微风和煦，如亲人的手，轻轻抚过鬓角。来过了，经历了，沧海桑田暖冷舒卷，神情真切略显和顺柔弱、质朴阳光而又深隐感叹忧伤，用生命吟唱抱负，感觉人生似乎不过如此，但亦远未穷尽遍历；憧憬过，彷徨过，拼搏过，否泰曲直清浊刚柔，多时只能颌首垂眉任从命运安排，没能及时珍惜逆天改命大机缘的瞬间青睐。妄我续妄我，奈何复奈何；浮沉转浮沉，生灭衍生灭。由这一世，回望过往的许多世，无限感慨尽入夕阳晚照中。一路走来时时牵念及趣向者，亲友师长，故土家国，觉悟慈悲。

娑婆诸多事情都有其另外的面向，都有其内在深远微妙及背后多层面联动的运行主旨，显象与潜势交错辉映，生灭与流转因果相续；若未知机善解且非特别必要则宜少涉他人因果，许多时强力干预并涉足他人自然演化进程很可能会适得其反。山石易伤脚，光芒易眩目；海水易湿身，旷远易迷路。一朝切近终幽怨，是缘亦是劫；若是当初未回首，今宵梦里谁？即使是因缘知机教化示现，亦宜使其人格独立及身心自由，随顺引导其自然走上觉悟之路并逐步成长为具有其本自完整特征的觉悟者。迷者执相轮转，因缘业果；觉者离相自在，示现历劫。

雪晶拥山向苍穹，秋池历夏忆春风；危崖流瀑汇江海，莽原连川接霓虹。

岁月长河如诗如歌亦如泣如诉；叹过往，多少英雄豪杰纵横捭阖，都前仆后继消失在帝国历史的起伏转弯处；看今世，多少路边惜别嘱托，相约再见却只余梦中。处在过程中尽心努力、磨炼沉淀，而又不勉强滞留，自然安顺、恢弘含容；明晓现下他人对你的态度就是他人日后景象的预演，而自己对外界的反馈状态即是自己未来场景的主幕构成，一切昭示及转化即在现下蜕变更新，直至豁然看淡生死随遇度世；那么，结合静虑修持无我我所，则即没有任何事情能够干扰内心的平和宁静及自然淡适；再过多少年，所有的人生经历，兴衰浮沉潮起潮落，前因后果诸阶幻相，尽在平素回眸一笑间；人生旅途中那些离别远去的身影已经转化为与自然同在，刻骨铭心的眷恋与伤痛也都已经得到慰藉；多少高论天下大势，多少萧肃至暗岁月，多少欢欣期冀在望，多少爱怨交织凝聚，都尽解晚风叮咛中。花开花谢月圆月缺，迁流更迭；春雨秋云夏露冬雪，同性无别。

在人生旅途上，知识、财富、权势、自觉，仅当其与慈悲伴行时才是至道方向。历代祖师级学者的非凡成就及开国帝王的卓越功业，形成世界发展主线脉络系列跃进中或并行或串行的关键环节或延展台阶。对娑婆世界物相及自然演替规律既不贪著，亦不厌离；既不穷研细索，亦不推舍躲避；如此可纯粹归融于大道，进而无著于道与非道，清净俱足无相圆融。

人生若梦悄然过半，娑婆掠影往事云烟；生犹死后淡回望，一世半世皆随缘。

谋生自主是必要的，精神亦当有所寄托；一旦谋生方向与精神追求趋同，则初期奋发图强进境显著，后期多是敷衍应世保位即安。许多时止步守势不思进取仅是表象，实则是已经窥见到现下阶段发展极限、洞悉自然现象演化平衡法则，多阶段、多层面、动态开放的激励、演化、守恒。许多时、许多事，努力仅是能够成就人生宿愿的其中一个面向；没有实质性的努力肯定不行，但仅有努力一般却远远不够；甚至是如果仅有单一项目的强劲努力，还可能会促使事情朝着预想的相反方向演进或朝向负面转化。大略方向目标动态着控，部分细节适当放任自由发挥自然成就、自组织自适应、无心胜有心，起事之初即设置平淡归途，凡举心动念皆以天下苍生为重，是能成就功业并随后功成身退的关窍所在。予世间诸事，以谋为先以静待时，知机适度动态践行，转化协同无我回向，是为要旨；若达至内在丰盈明澈自化圆融，则直趣清净自在无言可表；顿悟渐修悟后契证，恒时觉行循序十地。

长河宛转润苍原，玉池清波浮云天；凡尘花月佳期梦，圣者慧光照无眠。

在这尘世间，有许多人生方向及归类，其中诸层面的三个大略显著性代表即为富贵、皇天、神圣；这三个方向既可单线直成极致，亦可因缘转承递阶成就或联合成就；其前因分别为财势布施、身命布施与法义布施，主线标志分别蕴含着相互密切关联及可相互转化的成、住与造化；即便是平常一件事，若能经年累月做到极致化境的程度，则都会或多或少悟解自然大道。

在本质上，凡众辗转六道轮回，若不趣向觉悟解脱，即是生生世世沉陷在死局缠缚中难有出期。

在人生大略及细节二极端层面上，特别聪明与十分木纳相类似，其或多时沉浸在自己的理想世界，或由宿业因缘果致使此生自然隐蔽内在度世历劫，大多数未能过上正常无虞的俗世生活；尤其是理想简洁的激越抱负与平实度日的低限渴求多为社会所阻及不容，艰辛困顿与波折无奈几乎伴随一生时光。

人的一生，其每一瞬间都是至为珍贵和唯一的，逝去了即永不复来；人生艰辛浮沉无常，关注事物发展过程中的动态重点环节，总括兼顾诸强弱因素现前及潜在的困难与优势；一声问候，一句祝福，一丝感念，乃至刹那间绽放的笑颜，都即时增益并传递了尘世的光彩和温暖。

在人生旅途上，阶段性地或短程或长程，总有些近乎纯净的激励触及心底的善意使人满怀希望昂扬奋进，亦总有些由衷的感动或深切的牵绊使人甘愿低头负重前行。

人生旅途要略是：凡事少说，要说后说；言出知机，从善转折；换位点化，自他契合；应物无执，明彻因果；容人省悟，觉他自觉；智慧升维，无功无界。

一般地，人生总是处在与他人的相互作用中；作客时言行姿态不宜逾越家主，旅居时品誉人望不宜总超领主，住世时功德光辉不宜常掩国主；存在似扮饰，幻世如戏剧；角色不宜过于超卓独特而引人探究猜度，台词不宜过于义渊理深而导致玄析辩论，适机映显他人光彩亦是慈悲。诚以待人、虚以容物、宽简适宜，内在聪慧坚韧、表面平和迟钝、行事不拘泥于传统法度，关键时刻能够从容越众而出，担荷众生的期冀与寄托，如此往往可成就人生宿愿。不恋身、不贪位，不计利禄功名，绝地克期开启慧命，生当死过悟后契证，平等离相自度度他，同世娑婆皆为有缘人。

繁衍延续隐含生死轮转规则，知行创建预置更迭异坏趋势，觉悟成就易致偏狂执著迷境，此历历次第迁流演替皆生灭有为之象；超越繁衍延续，不执知行创建，无著觉悟成就，自然趣向且不住于生灭灭尽、不生不灭；全相位、周遍达，随缘随顺自觉觉他。

人生百十年，草木春秋间；云外斜阳暖，大千在召唤。

谋生之道在于转化、交易、平衡，再提升转化、更新交易、蓄势平衡，持续操作。谋生自给，旨在普济周达、随缘度世的同时拥有独立人格、能够自主命运。在人生根本的事情上不宜完全仰赖他人，而应以自己的力量为主进退适度，如此在任何情况下都不抱怨、不气馁，应机顺时努力成就。实则，生住异灭是人生主旋律；是故，自主生死是人生基本选择。基本上，能够感触的因缘人生及所处的现实世界，皆是幻觉；百转千回、魂牵梦绕的无尽祈盼及执著都是我法二执赋予的虚拟浮华；这其中，因果递续、业祈连绵，缺憾常若隐若现在不经意间，能够有尊严地生活及辞世乃人生第一愿望；娑婆轮转时时生灭、处处生灭，即时时中阴、处处中阴，而离相觉行就在现下时时处处。

远方承理想，他乡同故乡；一朝解因果，智慧启道场。

大千世界无际含容，你接我来我送你去，聚散轮回生灭幻化，随此生尽无复有余。

是与谁？一过擦肩，回眸嫣然，刹那时洒下光辉、拨动心弦；随即飘零陌路、各奔彼岸，却留下持久的记忆、成长着的温暖。又与谁？短暂相伴，镌刻永念，欲语凝噎黯垂帘；哪忍看，缓阶曲泮，碧瓦飞檐，依柳斜阳，空谷远山。终与谁？从青丝到华发，落寞嗟叹，相携欢颜，简约灿烂，一抹羞涩霞满天；四时衣衾互顾瞻，琴茗微醺风来晚，志趣契合访古道，光影摇曳年复年。

天地苍茫合离聚散，岁月斑驳真挚祝愿；梦境幻殇娑婆道场，相知相守即下惜缘。观照体验，浮世历练，由童真历经人世沧海桑田，再跃层复返童真，朴直纯粹随遇迁。

人生旅途多有变故，寒来暑往春荣秋枯；相遇相别缘生缘谢，究竟自觉终极怙主。

人生辗转，自救自度是一切的根本基础及首要前提，慈悲回向则是觉行力量的重要源泉；科学、哲学、宗教，即展现了人生悟解自度及觉他圆融的并行交错延展阶梯。其中科学虽是微末戏论小术，但亦近通至道，可依识开智；至道非言能表，亦广说无尽；何以故？在内典法指方向，若以第八识阿赖耶识止的方便论计，则至道基本在阿赖耶识的净分—阿摩罗识层面，科学基本在第六识意识及少分第七识末那识附近，些微延伸弥漫到多分末那识及阿赖耶识的染分；在阿摩罗识层面虽原本一切现成究竟圆满，但其依解证显成方起现行妙用；即至道的维度大于科学的维度，一滴海水遍摄江河。

一般地,人所看到的是人的末那识让人看到的;人所思考的往往也是人的末那识让人思考的。在远景上,君臣父子仁义孝悌,无中生有有为自为,离苦得乐寂灭解脱等,俱是台阶。在世界生成及运转规则、多世界图景演化及交互联动机理、凡众解脱途径及诸圣智慧圆融等大略上,若以第六识意识、第七识末那识、第八识阿赖耶识、第九识阿摩罗识为主节点,则儒家经典主论在第六、第七识间,道家经典主析在第七、第八识间,佛家经典主示且不执著第九识及其之后,并次第含摄前诸识;简略譬喻上,儒家相对道家如顺势涓流相对悠长江河,道家相对佛家如悠长江河相对浩瀚海洋。科学技术,究其极限乃是治世的工具,谋生的技巧,参考的标记,悟道的台阶;由科学向道、悟道、证道、回向,渐趣无所得亦乃通途,而智慧慈悲即是其要领。特别地,觉者在化导中表现出极端的缄默沉静、乃至身损形灭状态,皆是随缘随遇的适机觉行示现。在极致层面,方程解析,溯本探源,坐忘虚化,此三者不一不异。

在人生旅途上,平和内敛来自远大志向及坚定信念,谦诚质朴源由通达生命真谛和证解生灭本相;负起该承担的责任,完成需应尽的义务,将珍贵的每一瞬时光及每一次际遇都尽可能转向并实践自然解脱觉悟,整体上参照本觉的指引从容度过人生岁月;幻中证悟,梦里圆融;无上了义,虚栈化城;若知机善导,则当适时回向示现;或态度温润宽和,或言辞苛刻决绝,共同趣向觉悟至道,乃至觉行圆满。直归觉行,就在此刻;步向圆满,正当时节。

人生觉行至道基本所现是:当在所遇到的每个人身上都能看见自己或亲友师长处于类似阶段的虚影时,即可直接悟道;物相、学科,娑婆、识智等皆为道场、法器;成就无穷,显隐道途,自化宗门,无功普度;若觉行趣向圆满,则因缘所遇皆是诸圣面向或近于圣者层面的遍虚空交互示现教化;身口意业清净,空有不二常寂常悲,遍起现行妙用,常处一切智地。

科学家,当有在定律或原理、定理及效应、常数次第解析展开等方面的卓越贡献;哲学家,当有在世界与存在、永恒及虚无、盛衰演替周期循环等方面的深刻阐释;宗教家,当有在生命及因果、生死与轮转、生灭灭尽实相等方面的证悟化导;若此三位一体,则规律谱系或真理谱系浑然天成,自然生成知识树及显化智慧树,无际微妙莹澈,自化返回故乡的门径,及至多世界的庄严融合与自在分置。一抹微笑,和光同尘;一丝浅淡,离形去智。

惜 别 湖畔烟柳依清风,曲阶回栏伴长亭;离人挥手淡一笑,无尽期许眼波中。

沉 静 红尘忧望远苍茫,善缘觉行乃良方;诸般风云饰幻境,浮生若梦化道场。

旅 程 六道轮回复徘徊,业念觉照相续来;自觉觉他刹那间,觉行圆满数劫外。

4 结 论

本文给出了一普适简洁的二阶非线性动力学方程自嵌套结构及连接方程构造过程,进而由其拓展给出了一般饱和过程前偏对称(欠对称或弱对称)方程与后偏对称方程(广义偏对称方程或一般极限方程)的简洁构造形式;介绍了连接方程是该非线性方程一个近似等效解析解的方法,分析了一类简单非线性微分方程的基本解析解表示形式;探讨了自然现象演化过程的规律谱系(谱阵)或真理谱系(谱阵)——简学或维学研究方向,提出了现象在演化过程的状态间转变方程,其一般遵循状态间最优或最简洁路径光滑曲线方程形式这一自然最优原则或自然简洁原则;讨论了连接方程可作为经典S型曲线方程(或Logistic函数)的一般拓展形式的若干性质及其在部分饱和及蠕变过程等方面应用的简略注释;给出了数据曲线或部分连续函数的扩展型双曲正切级数形式及自然演化平衡法则;探讨了稳定核素比结合能趋势方程、太阳系元素丰度趋势方程;预言了基于非线性方程的新电路基本元件(包括电存储器—Nonlinstor、电敏器—Geomsensor),并在兼容非线性Newton动力学位移—时间方程、RLCNG串联电路电荷量—时间方程等方面进行了分析讨论;给出了广义分布函数及广义分布密度函数形式延展方向、粒子系统统计分布的平均粒子数趋势描述方程及其若干条件解形式,依据分布方程负解阐释了Bose-Einstein统计分布方程形式与Fermi-Dirac统计分布方程形式的数学对称性及互为潜势关系,讨论了Planck量子方程的频率区间性质;探讨了具有近似线性变频特征的简单非线性微分方程形式及在负频率与正频率之间转化时变频波动方程曲线的形态特征,讨论了数据库理论基础构架的一种简洁模式,建立了国家年度能源消费总量与GDP关系方程及国家年度人口数量与GDP关系方程,讨论了国家各阶层人均年收入值与其所占人口比例数间关系的趋势方程;随后探讨了岩石及单晶高温材料的蠕变过程曲线、半导体分立器件V—A特性曲线、超导材料电阻 R (或电阻率 ρ)—绝对温度 T 曲线方程、双晶Josephson结直流 I — U 特性曲线及Shapiro台阶电流阶跃幅值曲线、机械系统摩擦力—速度特性曲线的趋势方程、Newton冷却定律扩展形式、高聚物熔体流动曲线趋势方程;在唯象及趋势层面指出材料蠕变过程与高聚物熔体流动曲线具有相似性,及断裂裂纹扩展与湍流漩涡嵌套具有相通性的研究方向;是为对连接方程的一导引性参考简介,亦是对过往人生岁月的一简略纪念。

计算分析表明, 本文给出的趋势性偏对称方程 (1.19) 式 (包括由其拓展的广义偏对称方程 (1.27) 式~ (1.30) 式、(1.32) 式及 (1.33) 式等表述形式) 与非线性动力学微分方程 (1.1) 式等形式至少尚存在如下局限:

A 方程 (1.1) 式作为微分方程组在消元简化并略去高次项后的一种简略形式, 其在一般情况下的自嵌套内秉结构与进一步的等效解析解 (1.19) 式中诸系函数皆具有动态性质, 而且还未完全建立方程 (1.19) 式的诸待定系数与方程 (1.1) 式中现象特性参数及演化条件的联系, 尚不具有对基础数据库参量演化原理层面的解析意义;

B 方程 (1.19) 式中待定系数较多, 其具体形式需要依据基础数据库中相关参量迭代计算才能确定; 同时方程 (1.1) 式中的自激励函数与非线性极限系数的意义仍有待深入研究;

C 方程 (1.19) 式拟合曲线在一些局部位置较偏离基础数据, 仅是对基础数据库中参量演化过程的趋势拟合; 同时方程 (1.1) 式在趋势极限与细节波动复合过程描述方面仍需深入探讨, 兼顾长程骨架主线与短程波动细节诸层面的变化, 以进一步导出较为精确的解析数据;

D 方程 (1.1) 式与其等效解析解 (1.19) 式中诸系函数的形式变化特征, 需要通过对基础数据库中诸参量进行多层面的机理讨论予以计算确定, 并同时完善从基础数据库, 经趋势方程库, 到解析数据库, 再回馈到基础数据库的开放循环修正、动态自适应运算, 乃至构造生成新的方程形式, 补充趋势方程库, 动态选择, 并行计算, 三库联动, 开放循环迭代完善。

构造、解析及迭代计算的意义在于预测或预言; 预言参与预言, 预言演进预言, 预言成就预言, 并在验证预言的过程发展新的构造、解析及迭代计算方法, 继而给出预言的预言。

至此, 总结从二十岁左右起始至今近三十年来的学习与分析工作, 主要是集中在自然科学理论研究及唯象探索方向, 包括: 自相似分形扩展与分维扩展的差分方程描述、自相似分形测度计算的非整数阶微积分方程、一种理想点集的转化及其维数和测度方程, 一普适简洁的非线性动力学微分方程在一般情况下的自嵌套结构、近似等效解析解及其广泛应用 (诸如饱和极限、蠕变断裂、击穿、流体流动、世界成住坏空等过程的一般性趋势描述, 电路器件预言, 反常摩擦迟滞效应及复合摩擦迟滞效应预言等)、数据曲线间断区域的自适应连接方程及映射连接方法、广义偏对称方程形式及其应用 (如扩散等效方程等), 自然现象演化过程规律谱系 (谱阵)、现象演化系列相变特征函数的扩展型双曲正切级数表示形式及自然演化平衡法则, 广义分布函数及广义分布密度函数, 双程光速近似守恒的单程光速可变方程形式、光子闭弦模式构造的实验判据方程 (同旋面光子一般性折射方程) 及光阱 (能量阱) 方程或妖阱合一模型、真空能量构造与物质超光速运动规律, 波粒二象性的粒子运动方向波前波、粒子分形运动机理描述及量子分形方程, 粒子统计分布的平均能量方程扩展形式、平均粒子数趋势性微分方程及其负解 (潜势解或背景解) 意义, Planck 量子方程的频率区间性质展望, 稳定核素分布趋势方程、化学元素周期表极限与粒子质量趋势分布方程、稳定核素比结合能趋势方程、核素结合能理论最大值及相应质子数、太阳系元素丰度趋势方程, 地球公转、自转及全球板块运动三者耦合描述探讨, 天体运行连续轨道理论与离散轨道理论、在弱场时与强场时天体超光速运行轨道方程的具体形式及其近似解析解等。

上述这些研究工作基本都是试错性、简略性及探讨性的, 亦是初步导引性的、整体动态开放性 & 趋势示现性的, 尚不具有严格的基础解析意义。

回望过往, 多少晨曦或晚照伴在路上, 多少倾注和期盼盈在心间; 曾经的愿望是沿着 René Descartes、Isaac Newton、Leonhard Euler、James Clerk Maxwell、Heinrich Rudolf Hertz、Ludwig Boltzmann、Nikola Tesla、Max Planck 等前辈的足迹, 在学习理解自然的过程中对人生真谛及宇宙本相予以深刻证悟, 在 Newton 数理思想与 Siddhartha 普适智慧之间建立多维度有效连接 (系列化城), 乃至建立与 Newton 数理思想并行的框架体系而直连 Siddhartha 智慧; 探究事物存在状态及演化过程的一般连绵共相, 梳理各个离散别相, 进而展示普适无尽的总括实相, 趣融一切智、道种智及一切种智; 偶有些许所解、所悟、所证, 在极限上仍有离相的余迹微存, 还未越先辈的成就疆域, 未至自然现前起用的自在次第, 更远未在智慧层面明达通彻。毕竟先天智力有限, 后天努力不够, 时常散漫懈怠、随性度日; 流连山林、徜徉陌路, 春秋俯仰、朝暮空落, 寡闻少解、得过且过, 如此焉能成就夙愿? 在十几岁时, 才感觉时代境况对个人成长近乎决定性的影响; 二十几岁时, 还觉得人生尚早不急抉择方向; 三十几岁时, 觉得人生还有机会从零开始重启再来; 四十几岁时, 方觉时光迅疾恍然四季; 今近四十有九, 激情消减, 智钝言拙, 身心亦不复少时; 由此递因, 现下徘徊于浅慧陋境自然已是早定之果。

又是一年季节轮转, 从过去循环到现在, 当赋诗文以纪念, 并致意未来。

云水浮生

杨柳微翠幻前尘, 玉兰初开化早春; 碧荷素洁盈朝露, 金菊淡逸衍辉晕;

寒梅沁雪疏清流, 须弥入芥启梵音; 晓梦惜别约归期, 柴扉虚掩待故人。

参考资料

- 1 阎坤. 数据曲线间断区域的自适应连接方程研究[J]. 地球物理学进展, 2011, 26(1): 162—171.
YAN Kun. Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve[J]. Progress in Geophys, 2011, 26(1): 162-171. DOI:10.3969/j.issn.1004-2903.2011.01.018.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/curveandequation-pdf.pdf>
- 2 LI B, LIN J, YAO X. A novel evolutionary algorithm for determining unified creep damage constitutive equations[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44(5): 987-1002.
http://www.cs.bham.ac.uk/~xin/papers/IJMS_LiLinYao.pdf
- 3 任建喜. 单轴压缩岩石蠕变损伤扩展细观机理 CT 实时试验[J]. 水利学报, 2002, 1: 10-15.
REN Jianxi. CT real-time testing on meso-mechanism of creep damage propagation in rock under uniaxial compression[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002, 1: 10-15.
http://jhe.ches.org.cn/jhe/ch/reader/view_html.aspx?file_no=020103
- 4 T Kobayashi, Y Koizumi, M Maldini, S Nakazawa, M Osawa, T Yamagata, T Yokokawa. Microstructure and creep behaviour of a new single crystal superalloy developed at NRIM, 28 Jun 2000.
<http://www.nims.go.jp/htm21/oneday2000/maldini.html>
- 5 Y Koizumi, T Kobayashi, H Harada, et al. Creep life extension of a single crystal superalloy by re-heat-treatment. Proceedings of the Fourth International Charles Parsons Turbine Conference on "Advances in Turbine Materials, Design and Manufacturing", held at Newcastle upon Tyne, UK, 4-6 November 1997, pp. 679-684.
<http://www.nims.go.jp/htm21/documents/990225m.html>
- 6 李韞慧, 张琦锋, 孙晖, 等. 氧化锌薄膜的 p 型掺杂及光学和电学性质研究[J]. 材料科学与工艺, 2009, 17(5): 686—690, 695.
LI Yunhui, ZHANG Qifeng, SUN Hui, et al. Synthesis of p type ZnO thin films and their optical and electric properties[J]. Materials Science & Technology, 2009, 17(5): 686-690, 695.
<http://ir.pku.edu.cn/handle/211010/7755>
- 7 REN Z A, CHE G C, DONG X L, et al. Superconductivity and phase diagram in iron-based arsenic-oxides $\text{ReFeAsO}_{1-\delta}$ ($\text{Re} = \text{rare-earth metal}$) without fluorine doping[J]. EPL(Europhysics Letters), 2008, 83(1): 17002.
http://arxiv.org/pdf/0804.2582.pdf?origin=publication_detail
- 8 WU C, WANG M J, WU M K. Study of high temperature superconducting p-n junction[J]. Physica C: Superconductivity, 2007, 460: 424-425.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921453407002419>
Maw-Kuen Wu. Oxide thin films (with $R-T$ curve of YBCO/PCCO bilayer junction) [R]. Institute of Physics, Academia Sinica(Superconductor Lab Webpage 2008).
http://www.phys.sinica.edu.tw/~mkwu/laser_2.html
- 9 岳宏卫, 阎少林, 周铁戈, 等. 嵌入 Fabry-Perot 谐振腔的高温超导双晶约瑟夫森结的毫米波辐照特性研究[J]. 物理学报, 2010, 59(2): 1282—1287.
YUE Hongwei, YAN Shaolin, ZHOU Tiegao, et al. Millimeter wave irradiation characteristics of high temperature superconductor bicrystal Josephson junction embedded in a Fabry-Perot resonator[J]. Acta Phys. Sin., 2010, 59(2): 1282-1287.
<http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/article/downloadArticleFile.do?attachType=PDF&id=16602>
- 10 Rebbechi B, Oswald F B, Townsend D P. Measurement of gear tooth dynamic friction[R]. NASA Technical Memorandum 107279, Seventh International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9, 1996.
<http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19970001588.pdf>
- 11 Makkar C, Dixon W E, Sawyer W G, et al. A new continuously differentiable friction model for control systems design. Proceedings of the 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics Monterey, California, USA, 24-28 July, 2005: 600-605.
<http://nersp.osg.ufl.edu/~wsawyer/AIM2005.PDF>
- 12 Iurian C, Ikhouane F, Rodellar Benedé J, et al. Identification of a system with dry friction. University of Barcelona, September 2005.
<http://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/511/Iuriam.pdf>
- 13 Stefański A, Wojewoda J, Wiercigroch M, et al. Regular and chaotic oscillations of friction force[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2006, 220(3): 273-284.
[http://kapitaniak.kdm.p.lodz.pl/papers/2006/15_JMES2006-220\(15\).pdf](http://kapitaniak.kdm.p.lodz.pl/papers/2006/15_JMES2006-220(15).pdf)
- 14 Awrejcewicz J, Pyryev Y. Dynamics of a two-degrees-of-freedom system with friction and heat generation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2006, 11(5): 635-645.
http://212.191.87.54:1616/k16/awrejcewicz/publikacje/publ_pdf/PC171.pdf
- 15 Yesilata B, Clasen C, McKinley G H. Nonlinear shear and extensional flow dynamics of wormlike surfactant solutions[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2006, 133(2-3): 73-90.
<http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/31209/05-P-11.pdf>
- 16 Adams J M, Olmsted P D. Nonmonotonic models are not necessary to obtain shear banding phenomena in entangled polymer solutions[J]. Physical Review Letters, 2009, 102(6): 067801.
<http://arxiv.org/pdf/0805.0679.pdf>

非线性所成立 14 周年纪念

2011 年 3 月 18 日

yankun@nature.ac.cn